

TD2. Groupes**Exercice 1.**

Soit $G = \{e, a, b, c, d, x\}$ un ensemble et une l.c.i $*$ sur G de sorte que $(G, *)$ soit un groupe de neutre e . Compléter la table suivante.

$*$	e	a	b	c	d	x
e						
a			d			c
b		x		d	c	
c		d				
d			a		x	e
x		b		a		

Exercice 2.

Soient $n \geq 1$, G un groupe et $f: \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow G$ un morphisme de groupe.

- (1) Montrer que f est complètement déterminé par $f(\bar{1})$.
- (2) Existe-t-il des éléments d'ordre 3 dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$? En déduire les morphismes de groupes de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.
- (3) On considère un morphisme de groupes $f: \mathbb{Z}/18\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$.
 - (a) Quels sont les ordres possibles de $f(\bar{1})$?
 - (b) En déduire les morphismes possibles f .
- (4) On cherche à déterminer de façon générale les morphismes possibles $f: \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.
 - (a) Montrer que si $f(\bar{1}) = \hat{a}$ alors $\frac{m}{n \wedge m}$ divise a .
 - (b) Montrer que $\frac{m}{n \wedge m}$ divise a alors il existe un unique morphisme $f_a: \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ tel que $f_a(\bar{1}) = \hat{a}$.
 - (c) Donner la condition sur m, n pour qu'il existe un seul morphisme $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$?
 - (d) Calculer en fonction de n, m le nombre de morphismes possibles $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

Exercice 3.

On considère H, K deux sous-groupes d'un groupe G et on définit

$$HK = \{hk \mid h \in H, k \in K\}$$

Montrer que :

- (1) Si H, K sont distingués alors $H \cap K$ est distingué.
- (2) Si H est distingué alors $HK = KH$ et HK est un sous-groupe de G .
- (3) Si H, K sont distingués alors HK est distingué.
- (4) Si H, K sont distingués et $H \cap K = \{e\}$ alors $hk = kh, \forall h \in H, k \in K$.
- (5) Si H, K sont distingués et $HK = G$ alors l'application $\varphi: G \rightarrow G/H \times G/K$ définie par $g \mapsto (gH, gK)$ est un morphisme de groupes. Déterminer $\ker \varphi, \operatorname{im} \varphi$. Conclure.

- (6) Si $n \wedge m = 1$ alors $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ est cyclique.

Exercice 4.

Soit $n \geq 3$. On pose $U_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\}$. Soit $\omega_{k_0} = e^{\frac{2ik_0\pi}{n}}$ avec $k_0 \geq 1$ et d_0 l'ordre de ω_{k_0} .

- (1) Montrer que $(U_n, \times)$ a une structure de groupe.
- (2) Montrer que $k_0 d_0$ est un multiple de n .
- (3) Montrer que si $n \wedge k_0 > 1$ alors l'ordre de ω_{k_0} est strictement inférieur à n .
- (4) Montrer que si l'ordre de ω_{k_0} est n alors $k_0 \wedge n = 1$.

Exercice 5.

Soit $(G, \cdot)$ un groupe fini de neutre e . Montrer que :

- (1) l'ordre de $x \in G$ divise $|G|$.
- (2) si $x \in G$ est d'ordre mk avec $m, k \geq 1$ alors x^k est d'ordre m .
- (3) si $x \in G$ est d'ordre n alors $\{k \in \mathbb{Z} \mid x^k = e\} = n\mathbb{Z}$.
- (4) on a $x^{|G|} = e$ pour tout $x \in G$.

Soit $f: G \rightarrow H$ un morphisme de groupes. Montrer que :

- (a) si $x \in G$ est d'ordre fini alors l'ordre de $f(x)$ divise l'ordre de x .
- (b) si G et H sont finis avec $|G| \wedge |H| = 1$ alors f est le morphisme trivial.

Exercice 6.

Soient G un groupe abélien fini d'ordre n , noté multiplicativement, a un élément de G et H un sous-groupe propre de G tel que $a \notin H$. On considère l'ensemble :

$$N = \{t \in \mathbb{N}^* \mid a^t \in H\}.$$

- (1) Montrer que N possède un plus petit élément. On pose $m = \inf N$.
- (2) Montrer que $s \in N \implies m \mid s$.
- (3) Montrer que l'ordre de $\bar{a} \in G/H$ est m .
- (4) On considère l'ensemble :

$$K = \{x \in G \mid \exists j \in \mathbb{Z}, \exists h \in H : x = a^j h\}$$

- (a) Montrer que K est le plus petit sous-groupe de G contenant a et H .
- (b) Vérifier que K/H est égal à $\langle \bar{a} \rangle$ le sous-groupe engendré par $\bar{a}$.
- (c) En déduire que $|K| = m|H|$.
- (5) Application : on pose $G = \mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$, $H = 6\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$ et $a = \bar{4} \in G$
 - (a) Justifier que H est un sous-groupe propre de G et vérifier que $|H| = 4$.
 - (b) Vérifier que $a \notin H$ et que $m = 3$.
 - (c) En déduire que $K = 2\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$.

Exercice 7.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ déterminer la signature de

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n & n+1 & n+2 & \dots & 2n \\ 2 & 4 & 6 & \dots & 2n & 1 & 3 & \dots & 2n-1 \end{pmatrix}$$

Exercice 8.

On note A_5 le groupe des permutations paires de 5 éléments. Soient α et β les permutations suivantes :

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $G = \langle \alpha, \beta \rangle$ est un sous-groupe de A_5 d'ordre au moins 30.
2. Calculer $\beta\alpha\beta^{-1}$ et $\alpha\beta\alpha^{-1}$.

Exercice 9.

Soient n un entier ≥ 2 et $\sigma \in S_n$. On désigne par $\langle \sigma \rangle$ le groupe cyclique engendré par σ et d , l'ordre de σ dans le groupe S_n .

- (1) Montrer que l'application $\llbracket 0, d-1 \rrbracket \rightarrow \langle \sigma \rangle, k \mapsto \sigma^k$ est bijective.
- (2) On considère l'application $g: \mathbb{Z} \rightarrow S_n, k \mapsto \sigma^k$.
 - (a) Montrer que g est un morphisme de groupes.
 - (b) Déterminer img .
 - (c) Déterminer $\ker g$.
- (3) Montrer que la relation définie par $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \mid y = \sigma^k(x)$ est une relation d'équivalence sur $\llbracket 1, n \rrbracket$.
- (4) Soit σ un cycle de longueur l sur $\llbracket 1, n \rrbracket$ et de support noté S . On considère l'application $f: \llbracket 0, d-1 \rrbracket \rightarrow S, k \mapsto \sigma^k(a)$.
 - (a) Montrer que f est surjective.
 - (b) Montrer que f est injective.
 - (c) Conclusion ?