

Consignes:

- Vous avez **3 h** pour traiter ce sujet.
- Aucun document n'est autorisé. En particulier, il est strictement interdit d'avoir votre téléphone portable en marche pendant la composition.
- A la fin de la séance, vous rendrez le dossier (enregistré sous votre nom et prénoms) contenant vos fichiers avant de sortir de la salle.

Exercice 1

1. Tracer la courbe de la fonction f définie par $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$ sur l'intervalle $[-10, 10]$.
2. Tracer la courbe paramétrée de $\mathbb{R}^3$ donnée par

$$\begin{cases} x(t) = \cos(2t) \\ y(t) = \sin(t) \\ z(t) = t \end{cases}$$

2. Rechercher une racine de la fonction $x \mapsto -6 + 2x + \sin(x^2)$

Exercice 2

La vitesse d'un corps en chute libre sous la seule action de la pesanteur dans l'atmosphère est donnée par le principe fondamentale de la dynamique. Elle est solution de l'équation différentielle suivante :

$$m \frac{dV}{dt} = -kV^2 + mg$$

avec :

- $V(t)$ en m/s : la vitesse du corps au temps t ,
- $m=70\text{Kg}$: masse du corps,
- $g=9,81\text{N/Kg}$: accélération de la pesanteur,
- $k=0,27\text{Kg/m}$: résistance de l'air,
- $0 \leq t \leq 20\text{s}$: intervalle de temps sur lequel on cherche la solution,
- $V(0)=0$: la condition initiale.

1. Résolution numérique.

Ecrivez un script MATLAB *chuteEuler.m* calculant les valeurs approchées, selon la méthode d'Euler, de la solution ayant pour condition initiale $V(0) = 0$ sur l'intervalle de temps considéré pour un pas $h = 2s$. Tracez le graphe de la solution approchée.

2. Résolution numérique.

Ecrivez un script MATLAB *chuteRK.m* calculant les valeurs approchées selon la méthode de Runge-Kutta, et traçant son graphe.

3. Résolution analytique.

Résolvez l'équation sur une feuille pour la condition initiale donnée.

4. Analyse de l'erreur.

Pour $h = 2s, 1s, \frac{1}{2}s, \dots, 2^{-10}s$, on considère l'erreur $EE(h)$ et $ERK(h)$ de la méthode d'Euler et de Runge-Kutta (par rapport à la solution théorique) après une chute d'une durée de $8s$. Ecrivez des fonctions MATLAB *ErreurE.m* et *ErreurRK* qui créent des plots de l'erreur, avec le pas h sur l'abscisse et l'erreur $EE(h)$ ou $ERK(h)$ sur l'ordonnée.

Exercice 3

Dans cet exercice, on cherche à résoudre numériquement le système différentiel associé à l'équation différentielle de Van Der Pol :

$$(1) \quad \begin{cases} x''(t) - c(1 - x^2(t))x'(t) + kx(t) = 0 \\ x(0) = 0,25 \quad x'(0) = 0 \end{cases}$$

La méthode de Runge Kutta d'ordre 4 pour résoudre l'équation $X' = f(t, X)$ consiste à calculer la suite (X_n) d'approximations de la fonction X de la façon suivante :

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(t_n, X_n) \\ k_2 &= hf(t_n + \frac{h}{2}, X_n + \frac{k_1}{2}) \\ k_3 &= hf(t_n + \frac{h}{2}, X_n + \frac{k_2}{2}) \\ k_4 &= hf(t_n + h, X_n + k_3) \\ X_{n+1} &= X_n + \frac{k_1}{6} + \frac{k_2}{3} + \frac{k_3}{3} + \frac{k_4}{6} \end{aligned}$$

1. Ecrire une fonction RKu4 qui calcule les X_n à l'aide de la méthode de Runge-Kutta.

2. Appliquer la méthode d'Euler explicite et la méthode de Runge-Kutta 4 à l'équation de Van Der Pol. Tracer dans les deux cas et sur le même graphe (dans quatre sous-graphes), x obtenu en fonction du temps et le portrait de phase.

Données : $I = [0, 20]$, $k = 1$, $c = 1$.