

**Consignes:**

- Vous avez **5 heures** pour traiter ce sujet.
- Aucun document n'est autorisé. En particulier, il est strictement interdit d'avoir votre téléphone portable en marche pendant la composition.
- A la fin de la séance, vous rendrez vos copies et vos fichiers avant de sortir de la salle.
- **Il sera tenu compte de la netteté de la copie !**

**Exercice 1 : Méthode à un pas** On considère une équation différentielle à un pas, de la forme  $y' = f(y)$ , que l'on discrétise par une méthode à un pas de la forme

$$y_{n+1} = \frac{y_n}{1 + hg(y_n)}$$

où  $h$  est le pas de discrétisation,  $n \in \mathbb{N}$  et  $y_n$  approche  $y(nh)$ .

1. Ecrire cette méthode sous la forme générique d'une méthode à un pas.
2. Exprimer  $f$  en fonction de  $g$  pour que cette méthode soit consistante.
3. On suppose  $y(0) = y_0$ , montrer que pour tout  $n$ ,  $y_n \in [0, y_0]$ .

En déduire la stabilité puis la convergence de la méthode.

**Exercice 2 : Equation de Van Der Pol programmation Matlab**

On considère l'équation de Van Der Pol du second ordre suivant :

$$y'' - \mu(1 - y^2)y' + y = 0,$$

$\mu$  étant un paramètre scalaire. 1. Ecrire un code Euler explicite (vp1.m) pour la résolution de cette équation.

2. Utiliser le solveur ode43 pour résoudre cette même équation.

3. Tracer sur le même graphe la solution obtenue avec votre code et celle du solveur de matlab.

**Exercice 3 : un modèle d'évolution de la population**

La croissance démographique mondiale inquiète les experts économistes et démographes ; pour essayer de donner des prédictions, ils modélisent la croissance démographique à l'aide d'une équation différentielle. Comme eux, nous supposons que l'évolution de la population mondiale suit l'équation différentielle suivante

(1) 
$$y'(t) = a(t)y(t),$$

où  $y(t)$  représente le nombre d'individus (en milliards) au temps  $t$ , et où  $a(t)$  est le taux de croissance de la population au temps  $t$ . La condition initiale est déterminée par le fait qu'on comptait 3.696 milliards d'individus en 1970.

Dans un premier temps, on suppose que  $a$  est constant et ne dépend pas du temps :  $a = 0.016$ .

1. En remarquant que l'équation obtenue, dite équation de Malthus, est de la forme  $y'(t) = f(t, y)$ , calculez la fonction  $f$  associée à ce problème, et implémentez-la sous matlab (vous l'appelerez `f_malthus`).
2. Utilisez la fonction `ode` pour calculer une solution approchée de l'équation sur l'intervalle  $[1970, 2050]$  avec un intervalle de temps  $\delta t = 1/12$ .
3. Quelle taille de population (en milliards d'individus) obtient-on pour l'année 2011 ? Pour l'année 2050 ?
4. Coder votre fonction `Euler` pour calculer une solution approchée du système, puis tracez sur un même graphe la solution obtenue par `ode` et celle obtenue par `Euler`.
5. Calculez (à la main) la solution exacte de (1) avec  $a$  constant. Comparer les résultats obtenus avec `ode` et `Euler` en terme de précision.