

TD de Topologie**Exercice 1**

Soit E un ensemble non vide et $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ une application vérifiant :

- (a) $\forall (u, v) \in E^2, d(u, v) \geq 0$,
- (b) $\forall u \in E, d(u, u) = 0$,
- (c) $d(u, v) = 0$ implique $u = v$,
- (d) $\forall (u, v, w) \in E^3, d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$.

1. L'application d est-elle une distance sur E ?
2. Démontrer que les applications d' et $d'' : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$

$$d'(u, v) = \frac{1}{2} \left(d(u, v) + d(v, u) \right) \text{ et } d''(u, v) = \max\{d(u, v), d(v, u)\}$$

sont des distances sur E .

Exercice 2

Soient E un ensemble non vide et δ une distance sur E . Soit d'autre part $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante telle que $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(t) \neq 0$, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, et vérifiant pour tout $s, t \geq 0$: $\varphi(s + t) \leq \varphi(s) + \varphi(t)$.

1. Démontrer que la fonction $d = \varphi \circ \delta$ est une distance sur E .
2. Démontrer que les fonctions suivantes possèdent les propriétés exigées pour φ :

$$a) t \mapsto t^\alpha, \text{ avec } 0 < \alpha \leq 1, \quad b) t \mapsto \frac{t}{1+t}, \quad c) t \mapsto \ln(1+t)$$

Exercice 3

Soient $(E_i, d_i), i = 1, 2, \dots$ une famille infinie dénombrable d'espaces métriques.

On pose $E = \prod_{i=1}^{\infty} E_i$. Démontrer que la fonction $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall u = (u_1, u_2, \dots) \in E, \forall v = (v_1, v_2, \dots) \in E, d(u, v) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{2^i} \times \frac{d_i(u_i, v_i)}{1 + d_i(u_i, v_i)}$$

est une distance sur E .

Exercice 4

Soient (E, d) un espace métrique et A une partie non vide de E . Soit $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ une application lipschitzienne sur A :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}_+^*, | \forall a \in A, \forall b \in A : |f(a) - f(b)| \leq \lambda d(a, b).$$

Pour tout $a \in A$ et pour tout $u \in E$, on pose

$$f_a(u) := f(a) + \lambda d(a, u), \text{ puis } g(u) := \inf\{f_a(u) \mid a \in A\}.$$

Démontrez que g est une fonction de E dans $\mathbb{R}$ dont la restriction à A est égale à f et qui vérifie

$$\forall u \in E, \forall v \in E : |g(u) - g(v)| \leq \lambda d(u, v).$$

Exercice 5. Soit (X, d) un espace métrique, φ une jauge continue et $d' = \varphi \circ d$. Montrer que d' est une métrique uniformément équivalente à d .

Exercice 6. Montrer que dans tout espace métrique (E, d) une boule fermée est un fermé, mais que l'adhérence d'une boule ouverte $B(a, r)$ ne coïncide pas nécessairement avec la boule fermée $B'(a, r)$ (on pourra considérer dans $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$, $E = [0, 1] \times \{0\} \cup \{0\} \times [0, 1]$ et la boule centrée en $(\frac{1}{2}, 0)$ de rayon $1/2$)

Exercice 7

On note $X = l^\infty$ l'espace des suites réelles bornées, et $Y = c_0$ l'espace des suites réelles tendant vers 0, tous deux munis de la métrique (à vérifier) $d(x, y) = \sup_n |x(n) - y(n)|$. Montrer que Y est fermé dans X . Montrer que l'ensemble des suites nulles à partir d'un certain rang est dense dans Y mais pas dans X .

Exercice 8

Soit $X = (\mathcal{C}^1([0, 1]), N)$ avec $N(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$. Montrer qu'il existe une fonction $f \in X$ qui est point fixe de l'opérateur T donné par

$$Tf(x) = 1 + \int_0^x f(t - t^2) dt.$$

On pourra commencer par établir que $T \circ T$ est une contraction. Utiliser ceci pour établir l'existence d'une fonction unique $f \in X$ qui vérifie $f(0) = 1$ et $f'(x) = f(x - x^2)$.

Exercice 9

Soit $E = \mathcal{P}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, l'espace vectoriel des fonctions polynomiales à coefficients réels. On munit E de la norme (vérifier qu'il s'agit bien d'une norme) :

$$\|P\| = \max_{0 \leq t \leq 1} |P(t)|$$

1. Soit $s \in [0, 1]$ fixé. Démontrer que la fonction $\Psi_s : E \rightarrow \mathbb{R}, P \mapsto P(s)$ est continue en tout point P_0 de E .
2. Démontrer que la fonction $\Phi : E \rightarrow \mathbb{R}, P \mapsto P(2)$ n'est continue en aucun point de E

Exercice 10

Soit $E = \mathcal{P}([0, 1], \mathbb{R})$, l'espace vectoriel des fonctions polynomiales à coefficients réels restreintes à $[0, 1]$. On munit E de la norme $\|P\| = \max_{0 \leq t \leq 1} |P(t)|$. Démontrer

que la suite $(P_n)_{n \geq 0}$ définie par $P_n(t) := \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n$ est une suite de Cauchy dans

E non convergente dans E .

Exercice 11

Soient (E, d) un espace métrique, $A \neq \emptyset$ et $B \neq \emptyset$ deux parties fermées de E telles que $A \cap B = \emptyset$. Pour tout $u \in E$, on pose $f(u) = \frac{d(u, A)}{d(u, A) + d(u, B)}$.

1. Démontrer que f est continue sur E , que $f(u) = 0 \iff u \in A$, que $f(u) = 1 \iff u \in B$.
2. montrer que $0 < f(u) < 1$ pour tout $u \in E \setminus A \cup B$.
3. Démontrer qu'il existe deux ouverts U et V de E tels que $A \subset U$; $B \subset V$ et $U \cap V = \emptyset$.
4. Comment modifier f pour obtenir une fonction g continue, valant -1 sur A , 1 sur B et $-1 < g(u) < 1$ pour tout $u \in E \setminus A \cup B$?

Exercice 12

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux e.v.n réels. On suppose que $(F, \|\cdot\|_F)$ est un espace de Banach. Soit $\Phi : E \rightarrow F$ une application vérifiant :

- (i) $\exists M \in \mathbb{R}_+^*, \forall u \in E, \forall v \in E : \|\Phi(u+v) - \Phi(u) - \Phi(v)\|_F \leq M$
- (ii) $\exists C \in \mathbb{R}_+^*, \forall u \in E, \|u\|_E \leq 1 \Rightarrow \|\Phi(u)\|_F \leq C$

1. Démontrer que pour tout $u \in E$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\left\| \frac{1}{2^n} \Phi(2^n u) - \Phi(u) \right\|_F \leq \frac{M}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \right).$$

En déduire que pour tout $u \in E$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} \Phi(2^n u)$ existe dans F . On note $A(u)$ cette limite.

2. Démontrez que l'application $A : E \rightarrow F, u \mapsto A(u)$ vérifie $\forall u, v \in E : A(u+v) = A(u) + A(v)$.
3. Démontrez que $\sup_{u \in E} \|\Phi(u) - A(u)\|_F \leq M$. Déduisez-en que A est une application linéaire continue. Démontrez qu'il n'existe qu'une seule application linéaire continue vérifiant cette inégalité.

Exercice 13

Soit (E, d) un espace métrique et soit $A \subset E$. Soit $D \subset E$ une partie dense par rapport à A i.e $\text{adh}(D) \subset A$. Vérifiez que pour tout $\rho > 0$ fixé, $(\mathbb{B})_{u \in D}$ où $\mathbb{B}_u := \{v \in E \mid d(u, v) < \rho\}$ est un recouvrement de A .

Exercice 14

Soit X un espace métrique.

1. Soit $(F_n)_n$ une suite décroissante de fermés de X et soit $(x_n)_n$ une suite convergente telle que $x_n \in F_n$ pour tout $n \geq 0$. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in \bigcap_{n \geq 0} F_n.$$

Donner un exemple pour lequel $\bigcap_{n \geq 0} F_n = \emptyset$.

2. Soit maintenant $(K_n)_n$ une suite décroissante de *compacts* non vides de X . Vérifier que $K = \bigcap_{n \geq 0} K_n$ est non vide et que tout ouvert Ω qui contient K contient tous les K_n à partir d'un certain rang.

Exercice 15

Soit E un espace normé. Si A et B sont deux parties de E , on note $A + B$ l'ensemble $\{a + b ; a \in A \text{ et } b \in B\}$.

1. Montrer que si A est compact et B est fermé, alors $A + B$ est fermé.
2. Donner un exemple de deux fermés de $\mathbb{R}^2$ dont la somme n'est pas fermé.

Exercice 16

Soit (X, d) un espace métrique compact et $f : X \rightarrow X$ une application vérifiant

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y) \quad \text{pour tout } x, y \in X, x \neq y.$$

Le but ici est de montrer que f a un unique point fixe $p \in X$.

1. Justifier que f peut avoir au plus un point fixe.
2. Montrer que les ensembles $X_n = f^n(X)$, $n \in \mathbb{N}$, forment une suite décroissante de compacts et que $Y = \bigcap_{n \geq 0} X_n$ n'est pas vide.
3. Montrer que Y est un ensemble invariant, i.e. $f(Y) = Y$, et en déduire que le diamètre de cet ensemble est zero.
4. Conclure que f a un unique point fixe $p \in X$ et que pour tout $x_0 \in X$ la suite $x_n = f^n(x_0) \rightarrow p$, lorsque $n \rightarrow \infty$.

Exercice 17

Soit X un espace métrique.

1. Montrer que X est connexe si et seulement si toute application continue $f : X \rightarrow \{0, 1\}$ est constante.
2. Soit A une partie de X connexe. Montrer que toute partie $B \subset E$ vérifiant $A \subset B \subset \overline{A}$ est connexe.
3. Si $(A_n)_{n \geq 0}$ est une suite de parties connexes de X telle que $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$ pour tout $n \geq 0$. Prouver que $\bigcup_{n \geq 0} A_n$ est connexe.

Exercice 18

Notons $T = \{0\} \times [-1, 1] \cup [-1, 1] \times \{0\}$ muni de la topologie induite par celle de $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que T est compact et connexe et que $f(T)$ est un segment si $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue.

2. Déterminer les points $x \in T$ pour lesquels $T \setminus \{x\}$ est connexe.
3. Montrer que T n'est homéomorphe à aucune partie de $\mathbb{R}$.

Exercice 19

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application dérivable. Notons $A = \{(x, y) \in I \times I ; x < y\}$.

1. Montrer que A est une partie connexe de $\mathbb{R}^2$.
2. Pour $(x, y) \in A$, posons $g(x, y) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$. Montrer que $g(A) \subset f'(I) \subset \overline{g(A)}$.
3. Montrer que $f'(I)$ est un intervalle.

Ce résultat signifie que *la dérivée de toute fonction dérivable possède la propriété de la valeur intermédiaire* (un théorème de Darboux).

Exercice 20

Soit $\alpha_n > 0$ tel que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ converge. Soit (X, d) un espace métrique complet et $f : X \rightarrow X$ une application pour laquelle

$$d(f^n(x), f^n(y)) \leq \alpha_n d(x, y) \quad \text{pour tout } x, y \in X \text{ et } n \in \mathbb{N}; .$$

Montrer que, sous ces conditions, f possède un unique point fixe $p \in X$, que pour tout point initial $x_0 \in X$, la suite des itérées $(x_n = f^n(x_0))_{n \geq 0}$ converge vers p et que la vitesse de convergence d'une telle suite est contrôlée par

$$d(p, x_n) \leq \left(\sum_{\nu=n}^{\infty} \alpha_{\nu} \right) d(x_1, x_0) .$$