

Travaux Dirigés N°1 de Probabilité

Analyse Combinatoire - Calcul de Probabilité

Exercice 1*

Une entreprise décide de classer 20 personnes susceptibles d'être embauchées ; leurs CV étant très proches, le patron décide de recourir au hasard : combien y-a-il de classements possibles : sans ex-aequo ; avec exactement 2 ex-aequo ?

Exercice 2*

Un QCM comporte 10 questions, pour chacune desquelles 4 réponses sont proposées, une seule est exacte. Combien y-a-t-il de grilles-réponses possibles ? Quelle est la probabilité de répondre au hasard au moins 6 fois correctement ?

Exercice 3*

Un fumeur, après avoir lu une série de statistiques effrayantes sur les risques de cancer, problèmes cardio-vasculaires liés au tabac, décide d'arrêter de fumer ; toujours d'après des statistiques, on estime les probabilités suivantes : si cette personne n'a pas fumé un jour J_n , alors la probabilité pour qu'elle ne fume pas le jour suivant J_{n+1} est 0.3 ; mais si elle a fumé un jour J_n , alors la probabilité pour qu'elle ne fume pas le jour suivant J_{n+1} est 0.9 ; quelle est la probabilité P_{n+1} pour qu'elle fume le jour J_{n+1} en fonction de la probabilité P_n pour qu'elle fume le jour J_n ? Quelle est la limite de P_n ? Va-t-il finir par s'arrêter ?

Exercice 4*

On sait qu'à une date donnée, 3% d'une population est atteinte d'hépatite On dispose de tests de dépistage de la maladie : • Si la personne est malade, alors le test est positif avec une probabilité de 95%. • Si la personne est saine, alors le test est positif avec une probabilité de 10%. 1) Quelle est la probabilité pour une personne d'être malade si son test est positif ? 2) Quelle est la probabilité pour une personne d'être saine si son test est positif ? 3) Quelle est la probabilité pour une personne d'être malade si son test est négatif ? 4) Quelle est la probabilité pour une personne d'être saine si son test est négatif ?

Exercice 5*

Un débutant à un jeu effectue plusieurs parties successives. Pour la première partie, les probabilités de gagner ou perdre sont les mêmes ; puis, on suppose que : • Si une partie est gagnée, la probabilité de gagner la suivante est 0.6. • Si une partie est perdue, la probabilité de perdre la suivante est 0.7. Soit G_n l'événement «Gagner la partie n », et $u_n = P(G_n)$. On note $v_n = P(\overline{G_n})$. 1) Ecrire 2 relations entre u_n , u_{n+1} , v_n , v_{n+1} . 2) A l'aide de la matrice mise en évidence en déduire u_n et v_n . Faire un calcul direct à l'aide de $u_n + v_n$.

Exercice 6*

Un avion peut accueillir 20 personnes ; des statistiques montrent que 25% clients ayant réservé ne viennent pas. Soit X la variable aléatoire : «nombre de clients qui viennent après réservation parmi 20». Quelle est la loi de X ? (on ne donnera que la forme générale) quelle est son espérance, son écart-type ? Quelle est la probabilité pour que X soit égal à 15 ?

Exercice 7*

Un candidat se présente à un concours où, cette fois, les 20 questions sont données sous forme de QCM. A chaque question, sont proposées 4 réponses, une seule étant exacte. L'examineur fait le compte des réponses exactes données par les candidats. Certains candidats répondent au hasard à chaque question ; pour ceux-la, définir une variable aléatoire associée à ce problème et donner sa loi de probabilité, son espérance.

Exercice 8

L'entreprise Luminex fabrique des lampes, dont 80% durent plus de 3000 heures. Des tests sont effectués sur des échantillons de taille $n = 15$. 1) Quelle est le nombre moyen de lampes qui ont une durée de vie inférieure à 3000 heures dans un échantillon de taille 15 ? 2) Quelle est la probabilité que toutes les lampes de l'échantillon durent plus de 3000 heures ? 3) Quelle est la probabilité que 13 lampes ou plus, dans un échantillon de taille 15, durent plus de 3000 heures ?

Exercice 9*

Dans une entreprise, il y a 800 employés. 300 sont des hommes, 352 sont membres d'un syndicat, 424 sont mariés, 188 sont des hommes syndiqués, 166 sont des hommes mariés, 208 sont syndiqués et mariés, 144 sont des hommes mariés syndiqués. Combien y-a-t-il de femmes célibataires non syndiquées ?

Exercice 10*

Soit A l'ensemble des nombres à 7 chiffres ne comportant aucun "1". Déterminer les cardinaux suivants :

- 1) A .
- 2) A_1 , ensemble des nombres de A ayant 7 chiffres différents.
- 3) A_2 , ensemble des nombres pairs de A .
- 4) A_3 , ensemble des nombres de A dont les chiffres forment une suite strictement croissante (dans l'ordre où ils sont écrits).

Exercice 11

On tire simultanément 5 cartes d'un jeu de 32 cartes. Combien de tirages différents peut-on obtenir : 1) Sans imposer de contraintes sur les cartes. 2) Contenant 5 carreaux ou 5 piques. 3) 2 carreaux et 3 piques. 4) Au moins un roi. 5) Au plus un roi. 6) 2 rois et 3 piques.

Exercice 12*

On dispose de deux urnes u_1 et u_2 . L'urne u_1 contient trois boules blanches et une boule noire. L'urne u_2 contient une boule blanche et deux boules noires. On lance un dé non truqué. Si le dé donne un numéro inférieur ou égal à 2, on tire une boule dans l'urne u_1 . Sinon on tire une boule dans l'urne u_2 . (On suppose que les boules sont indiscernables au toucher). 1) Calculer la probabilité de tirer une boule blanche. 2) On a tiré une boule blanche. Calculer la probabilité qu'elle provienne de l'urne u_1 .

Exercice 13

Le quart d'une population a été vacciné contre une maladie contagieuse. Au cours d'une épidémie, on constate qu'il y a parmi les malades un vacciné pour quatre non vaccinés. On sait de plus qu'au cours de cette épidémie, il y avait un malade sur douze parmi les vaccinés. 1) Démontrer que la probabilité de tomber malade est égale à $\frac{5}{48}$. 2) Quelle était la probabilité de tomber malade pour un individu non-vacciné ? 3) Le vaccin est-il efficace ?

Exercice 14

On choisit une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes. On note : A l'événement : "La carte choisie est un pique". B l'événement : "La carte choisie est rouge (coeur ou carreau)". C l'événement : "La carte choisie est une figure (valet, dame, roi)".

- 1) Présenter un modèle mathématique décrivant l'expérience aléatoire.
- 2) Déterminer les probabilités des événements A , B , C , $A \cap B$, $B \cap C$, $A \cup B$, $A \cup C$.
- 3) Déterminer la probabilité de l'événement D "La carte choisie n'est ni un pique ni une figure".

Exercice 15

Dans une assemblée de 250 personnes, on ne remarque que les hommes portant la cravate ou ayant les yeux bleus. Il y a 120 hommes qui portent la cravate, 85 hommes qui ont les yeux bleus, dont 50 portent la cravate. On discute avec une personne choisie au hasard dans cette assemblée. 1) Quelle est la probabilité que ce soit un homme portant la cravate. 2) Quelle est la probabilité que ce soit un homme aux yeux bleus et portant la cravate. 3) Quelle est la probabilité que ce soit un homme aux yeux bleus ou portant la cravate. 4) Quelle est la probabilité de discuter avec une personne qui n'est ni un homme aux yeux bleus, ni un homme portant la cravate ?

Exercice 16

On utilise deux pièces de monnaie : l'une pipée, de sorte que lorsqu'on la lance, la probabilité d'obtenir pile soit $\frac{1}{4}$; l'autre normale dont la probabilité d'obtenir pile est $\frac{1}{2}$ à chaque lancer. 1) On prend une pièce au hasard (chacune des deux pièces a une probabilité $\frac{1}{2}$ d'être prise) a) Quelle est la probabilité d'obtenir pile ? b) On a obtenu pile : quelle est la probabilité d'avoir utilisé la pièce pipée. c) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois pile en faisant trois lancers avec la pièce choisie ? 2) Trois fois on choisit l'une des pièces au hasard qu'on lance (chacune des deux pièces a donc à chaque fois une probabilité $\frac{1}{2}$ d'être lancée) : déterminer la probabilité d'obtenir au moins une fois pile 3) On lance les deux pièces ensembles : quelle est la probabilité d'obtenir le même résultat pour les deux pièces ?

Exercice 17

Un sac contient 5 jetons verts (numérotés de 1 à 5) et 4 jetons rouges (numérotés de 1 à 4). 1) On tire successivement et au hasard 3 jetons du sac, sans remettre le jeton tiré. Calculer les probabilités : a) De ne tirer que 3 jetons verts ; b) De ne tirer aucun jeton vert c) De tirer au plus 2 jetons verts ; d) De tirer exactement 1 jeton vert. 2) On tire simultanément et au hasard 3 jetons du sac. Reprendre alors les questions a), b), c) et d).

Exercice 18

On souhaite ranger sur une étagère 4 livres de mathématiques (distincts), 6 livres de physique, et 3 de chimie. De combien de façons peut-on effectuer ce rangement : 1. si les livres doivent être groupés par matières. 2. si seuls les livres de mathématiques doivent être groupés.

Exercice 19*

- 1) Soient n, p des entiers naturels avec $n \geq p$. Démontrer que $\sum_{k=p}^n C_k^p = C_{n+1}^{p+1}$
- 2) Calculer $(1+i)^{4n}$. En déduire les valeurs des sommes suivantes : $\sum_{p=0}^{2n} (-1)^p C_{4n}^{2p}$ et $\sum_{p=0}^{2n-1} (-1)^p C_{4n}^{2p+1}$

3) Calculer les sommes suivantes : $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}^2$ et $T_n = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}^2$

Exercice 20*

On jette 3 fois un dé à 6 faces, et on note a , b et c les résultats successifs obtenus. On note $Q(x) = ax^2 + bx + c$. Déterminer la probabilité pour que : Q ait deux racines réelles distinctes. Q ait une racine réelle double. Q n'ait pas de racines réelles.

Exercice 21

Une télévision privée décide d'opter pour le système de « programmes à péage » en utilisant des décodeurs commandés par des codes à huit chiffres. a) Donner le nombre d'abonnés potentiels puis le nombre d'abonnés avec code composés de huit chiffres différents. b) Calculer le nombre de codes à 2 chiffres différents, l'un étant utilisé 1 fois et l'autre 7 fois. c) Même question avec 3 chiffres différents, dont 2 sont utilisés une fois et le troisième 6 fois.

Exercice 22

L'épreuve orale de statistique et probabilités d'un DEUG est organisée en lots de 3 sujets tirés au sort parmi 80 sujets portant sur ce cours. L'étudiant doit traiter un des sujets de son choix. 1) Combien d'épreuves différentes peut-on organiser ? 2) Un candidat se présente en n'ayant révisé que 50 sujets. Quelle est la probabilité pour qu'il puisse traiter : a) les 3 sujets, b) deux sujets, c) un sujet, d) aucun sujet. 3) Combien de sujets un étudiant doit-il réviser pour avoir une probabilité au moins égale à 0,99 de répondre au moins à un sujet ?

Exercice 23

On considère deux portées de lapereaux d'une race donnée : la première portée est de 6 lapereaux et la deuxième de 8 lapereaux. On regroupe tous les lapereaux et on suppose que chacun a la même probabilité d'être choisi. 1) On prélève simultanément 4 lapereaux. Calculer les probabilités d'obtenir : • 3 lapereaux de la première portée ; • 1 lapereau de la deuxième portée ; • au plus un lapereau de la deuxième portée. 2) Donner le nombre moyen attendu de lapereaux de la première portée.

Exercice 24

Dans une population contenant 0,1 % de malades atteints d'une maladie " M ", on choisit une personne au hasard. Cette personne subit un test donné " T ". On suppose que l'aptitude du test à déceler la maladie " M " est définie ainsi : • sur 100 personnes atteintes de la maladie " M ", 90 auront un test positif. • sur 100 personnes non atteintes de la maladie " M ", 1 personne aura un test positif. On définit les événements aléatoires suivants : T : " Le test considéré est positif " ; $\bar{T}$: " Le test considéré est négatif " ; M : " La personne choisie au hasard est atteinte de la maladie M " ; $\bar{M}$: " La personne choisie au hasard n'est pas atteinte de la maladie M ". 1) Donner les valeurs des probabilités suivantes : $P(M)$, $P(\bar{M})$, $P(T/M)$, $P(T/\bar{M})$. 2) Calculer la spécificité du test. 3) En remarquant que l'on peut écrire $T = (M \cap T) \cup (\bar{M} \cap T)$, calculer la probabilité pour que le test " T " soit positif. 4) En déduire la valeur prédictive positive du test, c'est-à-dire la valeur de la probabilité pour que, le test étant positif, la personne choisie soit réellement atteinte de la maladie " M ". 5) Calculer la valeur prédictive négative et l'efficacité du test. 6) Refaire l'exercice en supposant que la prévalence de la maladie est 10 %.

Exercice 25*

Le gérant d'un magasin d'informatique a reçu un lot de boîtes de CD-ROM. 5% des boîtes sont abîmées. Le gérant estime que : • 60% des boîtes abîmées contiennent au moins un CD-ROM défectueux. • 98% des boîtes non abîmées ne contiennent aucun CD-ROM défectueux. Un client achète une boîte du lot. On désigne par A l'événement : "la boîte est abîmée" et par D l'événement "la boîte achetée contient au moins une disquette défectueuse". 1) Donner les probabilités de $P(A)$, $P(\bar{A})$, $P_A(D)$, $P(D/\bar{A})$, $P(\bar{D}/A)$ et $P(\bar{D}/\bar{A})$. 2) Le client constate qu'un des CD-ROM acheté est défectueux. Quelle est la probabilité pour qu'il ait acheté une boîte abîmée.

Exercice 26

On considère une urne contenant 4 boules blanches et 3 boules noires. On tire une à une et sans remise 3 boules de l'urne. Quelle est la probabilité pour que la première boule tirée soit blanche, la seconde blanche et la troisième noire ?

Exercice 27

Un questionnaire à choix multiples propose m réponses pour chaque question. Soit p la probabilité qu'un étudiant connaisse la bonne réponse à une question donnée. S'il ignore la réponse, il choisit au hasard l'une des réponses proposées. Quelle est pour le correcteur la probabilité qu'un étudiant connaisse vraiment la bonne réponse lorsqu'il l'a donnée ?

Exercice 28

1. Soient A, B, C trois événements. Montrer que : $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$.
2. On dispose de 3 composants électriques C_1 , C_2 et C_3 dont la probabilité de fonctionnement est p_i , et de fonctionnement totalement indépendant les uns des autres. Donner la probabilité de fonctionnement du circuit (a) si les composants sont disposés

en série. (b) si les composants sont disposés en parallèle. (c) si le circuit est mixte : C_1 est disposé en série avec le sous-circuit constitué de C_2 et C_3 en parallèle.

Exercice 29

Une information est transmise à l'intérieur d'une population. Avec une probabilité p , c'est l'information correcte qui est transmise à chaque étape d'une personne à une autre. Avec une probabilité $1 - p$, c'est l'information contraire qui est transmise. On note p_n la probabilité que l'information après n transmissions soit correcte. 1. Donner une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n . 2. En déduire la valeur de p_n en fonction de p et de n . 3. En déduire la valeur de $\lim_n p_n$. Qu'en pensez-vous ?

Exercice 30

Une compagnie d'assurance répartit ses clients en trois classes R_1 , R_2 et R_3 : les bons risques, les risques moyens, et les mauvais risques. Les effectifs de ces trois classes représentent 20% de la population totale pour la classe R_1 , 50% pour la classe R_2 , et 30% pour la classe R_3 . Les statistiques indiquent que les probabilités d'avoir un accident au cours de l'année pour une personne de l'une de ces trois classes sont respectivement de 0.05, 0.15 et 0.30. 1. Quelle est la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la population ait un accident dans l'année ?

Exercice 31

Dans un jeu de 32 cartes, on tire simultanément cinq cartes. On dit que ces cinq cartes forment une main. Dénombrer le nombre de mains contenant : 1) au plus un cœur ; 2) au moins un cœur ; 3) au plus deux cœurs et un roi.

Exercice 32

Soit n un entier supérieur ou égal à 4. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n .

1) On place les n boules, au hasard, dans n boîtes numérotées de 1 à n , chaque boîte pouvant contenir de 0 à n boules. a) Quelles est le nombre de dispositions possibles ? b) Soit E_n l'événement : "chaque boîte contient exactement une boule" et p_n sa probabilité. Calculer p_n . 2) Démontrer que pour tout réel positif x , $(1+x)^n \geq 1+nx$ (inégalité de Bernoulli). 3) Démontrer que, quel que soit n , on a $\frac{p_n}{p_{n+1}} \geq 2$. 4) Montrer que pour tout n : $p_n \leq \frac{3}{2^{n+1}}$. En déduire $\lim_n p_n$.

Exercice 33

Au casino, le jeu de la roulette permet au joueur de choisir entre deux couleurs : "rouge" et "noir". Le joueur mise une certaine somme sur l'une de ces deux couleurs :

- s'il perd le casino prend sa mise ;
- s'il gagne, le casino lui rend sa mise doublée.

Partie A

Un joueur décide de miser systématiquement sur la couleur rouge. Les jeux successifs sont supposés indépendants. 1) Soit n un entier non nul. Calculer la probabilité pour que le rouge ne sorte à aucun des n premiers jeux. 2) Le joueur décide de miser $5F$ au premier jeu, puis de tripler sa mise jusqu'à ce que sa couleur soit gagnante. On suppose que le joueur perd les n premiers jeux et gagne le $(n+1)^{eme}$. a) Calculer la perte totale du joueur après les n premiers jeux. b) Calculer la mise du joueur au $(n+1)^{eme}$ jeu et le gain qu'il réalise lors de ce jeu. c) Démontrer qu'il réalise alors un bénéfice, noté u_{n+1} , tel que $u_{n+1} = 2,5.(3^n + 1)$ d) Quelle est la limite de la suite (u_n) quand n tend vers l'infini ?

Partie B

Face à une telle situation qui peut mettre en péril ses finances, le casino réagit en remettant les mises à 1000F. 1) On suppose que le joueur qui a adopté la stratégie précédente perd à toutes les parties. Quel que soit le nombre maximal n_0 de jeux auxquels il peut participer ? 2) Combien a-t-il perdu après ces n_0 parties ? Quelle est la probabilité que cette situation se réalise ?

Exercice 34

Une télévision privée décide d'opter pour le système de « programmes à péage » en utilisant des décodeurs commandés par des codes à huit chiffres. 1) Donner le nombre d'abonnés potentiels puis le nombre d'abonnés avec code composés de huit chiffres différents. 2) Calculer le nombre de codes à 2 chiffres différents, l'un étant utilisé 1 fois et l'autre 7 fois. 3) Même question avec 3 chiffres différents, dont 2 sont utilisés une fois et le troisième 6 fois.

Exercice 35

On dispose d'une urne contenant 20 boules dont 8 noires, 7 rouges et 5 blanches. On pioche au hasard et avec remise cinq boules. Calculer la probabilité de piocher : 1) que des boules d'une même couleur 2) que des boules blanches sachant que toutes les boules sont d'une même couleur. 3) deux boules d'une couleur et trois boules d'une autre couleur, 4) trois boules blanche sachant que l'on obtient les trois couleurs. Refaire l'exercice lorsqu'il y a remise.

Exercice 36

Une urne contient 13 boules dont 6 noires, 3 blanches et 4 rouges. On pioche 4 boules. On pose E : "obtenir 2 blanches" et F : "obtenir 2 rouges". 1. On suppose qu'il n'y a pas de remise. Calculer les probabilités suivantes : $P(E \cap F)$; $P(F|E)$; $P(E|F)$: Les événements E et F sont-ils indépendants ? 2. Refaire l'exercice en supposant que l'on pioche avec remise.

Travaux Dirigés N°2 de Probabilité

Variables aléatoires discrètes

Exercice 1*

Une urne contient sept boules : une rouge, deux jaunes et quatre vertes. Un joueur tire au hasard une boule. Si elle est rouge, il gagne 10 F, si elle est jaune, il perd 5 F, si elle est verte, il tire une deuxième boule de l'urne sans avoir remplacé la première boule tirée. Si cette deuxième boule est rouge, il gagne 8 F, sinon il perd 4 F. 1) Construire un arbre pondéré représentant l'ensemble des éventualités de ce jeu. 2) Soit X la variable aléatoire associant à chaque tirage le gain algébrique du joueur (une perte est comptée négativement). a) Etablir la loi de probabilité de la variable X . b) Calculer l'espérance de X . 3) Les conditions de jeu restent identiques. Indiquer le montant du gain algébrique qu'il faut attribuer à un joueur lorsque la boule tirée au deuxième tirage est rouge, pour que l'espérance de X soit nulle.

Exercice 2

Dans un bureau de poste, il y a deux guichets. Chacune des personnes arrivant à la poste choisit le premier guichet avec une probabilité p , ou le deuxième guichet avec une probabilité $q = 1 - p$. Les personnes effectuent leur choix de façon indépendante. En une heure, le nombre X de personnes arrivées à la poste suit une loi de Poisson $P(m)$. On désigne par Y le nombre de personnes ayant choisi le premier guichet. 1. Exprimer la probabilité conditionnelle de $Y = k$ sachant que $X = n$. 2. En déduire la loi conjointe du couple (X, Y) . 3. Déterminer la loi de Y . On trouvera que Y suit une loi de Poisson de paramètre mp .

Exercice 3

Le service de dépannage d'un grand magasin dispose d'équipes intervenant sur appel de la clientèle. Pour des causes diverses, les interventions ont parfois lieu avec retard. On admet que les appels se produisent indépendamment les uns des autres, et que, pour chaque appel, la probabilité d'un retard est de 0,25. 1. Un client appelle le service à 4 reprises. On désigne par X la variable aléatoire prenant pour valeurs le nombre de fois où ce client a dû subir un retard. a) Déterminer la loi de probabilité de X , son espérance, sa variance. b) Calculer la probabilité de l'événement : "Le client a au moins subi un retard". 2) Le nombre d'appels reçus par jour est une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre m . On note Z le nombre d'appels traités en retard. a) Exprimer la probabilité conditionnelle de $Z = k$ sachant que $Y = n$. b) En déduire la probabilité de $\{Z = k \text{ et } Y = n\}$. c) Déterminer la loi de Z . On trouvera que Z suit une loi de Poisson de paramètre $m \times 0,25$. 3. En 2003, le standard a reçu une succession d'appels. On note U le premier appel reçu en retard. Quelle est la loi de U ? Quelle est son espérance?

Exercice 4*

On considère une entreprise de construction produisant des objets sur deux chaînes de montage A et B qui fonctionnent indépendamment l'une de l'autre. Pour une chaîne donnée, les fabrications des pièces sont indépendantes. On suppose que A produit 60% des objets et B produit 40% des objets. La probabilité qu'un objet construit par la chaîne A soit défectueux est 0.1 alors que la probabilité pour qu'un objet construit par la chaîne B soit défectueux est 0.2. 1) On choisit au hasard un objet à la sortie de l'entreprise. On constate que cet objet est défectueux. Calculer la probabilité de l'événement l'objet provient de la chaîne A. 2) On suppose de plus que le nombre d'objets produits en une heure par A est une variable aléatoire Y qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 20$. On considère la variable aléatoire X représentant le nombre d'objets défectueux produits par la chaîne A en une heure. (a) Rappeler la loi de Y ainsi que la valeur de l'espérance et de la variance de Y . (b) Soient k et n deux entiers naturels, déterminer la probabilité conditionnelle $P(X = k/Y = n)$. (On distinguera les cas $k \leq n$ et $k > n$). (c) En déduire, en utilisant le système complet d'événements $(Y = i)_{i \in \mathbb{N}}$, que X suit une loi de Poisson de paramètre 2.

Exercice 5*

On a n boîtes numérotées de 1 à n . La boîte k contient k boules numérotées de 1 à k . On choisit au hasard une boîte, puis une boule dans la boîte. Soit X le numéro de la boîte, et Y le numéro de la boule. 1) Déterminer la loi du couple (X, Y) . 2) Déterminer la loi de Y et son espérance. 3) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes? 4) Calculer $P(X = Y)$.

Exercice 6*

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, telles que :

$$P((X = i) \cap (Y = j)) = \frac{a}{2^{i+j}} \quad (i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2$$

1) Calculer a . 2) Déterminer les lois marginales de X et Y . 3) X et Y sont-elles indépendantes?

Exercice 7*

Considérons deux v.a.r. discrètes X_1 et X_2 indépendantes définies sur un espace de probabilité (Ω, P) , suivant respectivement les lois de Poisson de paramètres λ_1 et λ_2 ($\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$). Posons $S = X_1 + X_2$. 1) Déterminer la loi de S . 2) Soit $k \in \mathbb{N}$; calculer $P(X_1 = k / \{S = n\})$ pour n fixé ($n \in \mathbb{N}$) et préciser la loi suivie par la v.a.r. $(Z = X_1 / \{S = n\})$

Exercice 8

On considère un dé cubique truqué, de telle sorte que la probabilité d'obtenir la face numérotée k est proportionnelle à k (on suppose que les faces sont numérotées de 1 à 6). Soit X la variable aléatoire associée au lancer de ce dé. 1. Déterminer la loi de X , calculer son espérance. 2. On pose $Y = \frac{1}{X}$. Déterminer la loi de Y , et son espérance.

Exercice 9*

Un garagiste dispose de deux voitures de location. Chacune est utilisable en moyenne 4 jours sur 5. Il loue les voitures avec une marge brute de 300 euros par jour et par voiture. On considère X la variable aléatoire égale au nombre de clients se présentant chaque jour pour louer une voiture. On suppose que $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$ avec $P(X = 0) = 0,1$, $P(X = 1) = 0,3$, $P(X = 2) = 0,4$, $P(X = 3) = 0,2$. 1. On note Z le nombre de voitures disponibles par jour. Déterminer la loi de Z . On pourra considérer dans la suite que X et Y sont indépendantes. 2. On note Y la variable aléatoire : "nombre de clients satisfaits par jour". Déterminer la loi de Y . 3. Calculer la marge brute moyenne par jour.

Exercice 10

Soit $p \in]0, 1[$. On dispose d'une pièce amenant "pile" avec la probabilité p . On lance cette pièce jusqu'à obtenir pour la deuxième fois "pile". Soit X le nombre de "face" obtenus au cours de cette expérience. 1. Déterminer la loi de X . 2. Montrer que X admet une espérance, et la calculer. 3. On procède à l'expérience suivante : si X prend la valeur n , on place $n + 1$ boules numérotées de 0 à n dans une urne, et on tire ensuite une boule de cette urne. On note alors Y le numéro obtenu. Déterminer la loi de Y . Calculer l'espérance de Y . 4. On pose $Z = X - Y$. Donner la loi de Z et vérifier que Z et Y sont indépendantes.

Exercice 11*

On joue à pile ou face avec une pièce non équilibrée. A chaque lancer, la probabilité d'obtenir pile est $2/3$, et donc celle d'obtenir face est $1/3$. Les lancers sont supposés indépendants, et on note X la variable aléatoire réelle égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir, pour la première fois, deux piles consécutifs. Pour $n \geq 1$, on note p_n la probabilité $P(X = n)$. 1. Expliciter les événements $(X = 2)$, $(X = 3)$, $(X = 4)$, et déterminer la valeur de p_2, p_3, p_4 . 2. Montrer que l'on a $p_n = \frac{2}{9}p_{n-2} + \frac{1}{3}p_{n-1}$, $n \geq 4$. 3. En déduire l'expression de p_n pour tout n . 4. Rappeler, pour $q \in]-1, 1[$, l'expression de $\sum_{n=0}^{+\infty} nq^n$, et calculer alors $E(X)$.

Exercice 12*

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{k=0}^n kP(X = k) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k) - nP(X > n)$$

En déduire que si X admet une espérance, alors : $E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X > k)$. (b) Montrer de même que si X admet une variance,

alors : $E(X^2) = \sum_{k=0}^{\infty} (2k + 1)P(X > k)$. 2. On dispose d'une urne contenant N boules numérotées de 1 à N . On effectue, à partir de cette urne, n tirages successifs d'une boule, avec remise, et on note X le plus grand nombre obtenu. (a) Calculer l'espérance de X . Préciser la loi de X . (b) Déterminer un équivalent de $E(X)$ lorsque N tend vers l'infini, à n fixé (on pourra comparer à une intégrale). (c) Dans les mêmes conditions, déterminer un équivalent de la variance $V(X)$.

Exercice 13*

On sait que la probabilité pour qu'une personne soit allergique à un certain médicament est égale à 10^{-3} . On s'intéresse à un échantillon de 1000 personnes. On appelle X la variable aléatoire dont la valeur est le nombre de personnes allergiques dans l'échantillon. 1) Déterminer, en la justifiant, la loi de probabilité de X . 2) En utilisant une approximation que l'on justifiera, calculer les probabilités des événements suivants : a) Il y a exactement deux personnes allergiques dans l'échantillon. b) Il y a au moins deux personnes allergiques dans l'échantillon.

Exercice 14*

Dans certains accidents de la route, les chocs peuvent être latéraux ou frontaux : ces deux états sont résumés par la variable aléatoire X à deux valeurs 0 et 1 ; choc latéral : $X = 0$; choc frontal : $X = 1$. La gravité de l'accident est décrite par la variable aléatoire Y à trois valeurs 1, 2, 3. Une enquête réalisée sur un grand nombre d'accidents conduit au tableau

X \ Y	Y	
	0	1
1	0,10	0,15
2	0,08	0,25
3	0,02	0,40

donnant la loi de probabilité conjointe du couple (X, Y) 1) Calculer les probabilités suivantes : $P(X = 1)$, $P(X = 0 \text{ et } Y \geq 2)$, $P(X = 0 / Y \geq 2)$ 2) Calculer les lois de probabilité marginales de X et de Y , ainsi que leurs espérances mathématiques et leurs variances. 3) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ? 4) Etablir la loi de probabilité de la variable aléatoire

$Z = X \cdot Y$ et calculer $E(Z)$ et $Var(Z)$. 5) Calculer la covariance $Cov(X, Y)$ et le coefficient de corrélation linéaire ρ . Conclusion ? 6) Calculer l'espérance mathématique et la variance de la variable aléatoire $T = X + Y$. 7) On définit une fonction de gravité $G = aX + bY$ où $a = 0,2$ et $b = 0,8$. Calculer $E(G)$ et $Var(G)$.

Exercice 15*

On considère qu'il apparaît, en moyenne, chaque année 20 nouveaux cas de poliomyélite pour 100 000 habitants. On appelle X le nombre de nouveaux cas de poliomyélite dans l'année, dans une ville de 50 000 habitants (respectivement 5 000 habitants). 1) Montrer que la variable X suit une loi binomiale. 2) Montrer que l'on peut faire ici l'approximation de la loi binomiale par une loi de Poisson. 3) Calculer la probabilité pour qu'il apparaisse au plus quatre nouveaux cas de poliomyélite : a) dans une ville de 50 000 habitants. b) dans une ville de 5 000 habitants.

Exercice 16

La loi du couple (X, Y) est définie par le tableau suivant :

X \ Y	1	2	3
	0	$\frac{1}{2}$	0
2	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$

1) Trouver les lois marginales de X et Y . 2) Montrer que X et Y ne sont pas indépendantes. 3) Calculer la covariance de X et Y et le coefficient de corrélation linéaire ρ .

Exercice 17*

On lance deux dés parfaitement équilibrés et on désigne par S la somme des points obtenus. Soit X la v.a qui prend pour valeur le reste de la division de S par 2 et Y la v.a qui prend pour valeur le reste de la division de S par 4. 1) Déterminer la loi conjointe de (X, Y) . 2) Déterminer les lois marginales de X et de Y . Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 18*

Une secrétaire appelle successivement trois correspondants. On admet que chaque appel est indépendant des précédents et que quelque soit le correspondant appelé :

- la probabilité de l'obtenir est p ,
- la probabilité de ne pas l'obtenir est q avec $q = 1 - p$

1) Soit X la v.a qui prend pour valeurs le nombre de correspondant obtenus lors d'un premier essai. Établir la probabilité de X . 2) Après trois appels successifs, la secrétaire procède, dans les mêmes conditions à un second appel des $3 - X$ correspondants qu'elle n'a pas pu joindre la première fois. On désigne par Y le nombre de correspondants obtenus dans cette seconde série d'appels. Établir la loi de probabilité de Y . 3) On désigne par Z le nombre total de correspondants obtenus, après ces deux séries d'appels : $Z = X + Y$ a) Démontrer que Z suit la loi binomiale de paramètres 3 et $1 - q^2$ b) On suppose que $p = \frac{1}{3}$. Déterminer, dans ce cas, $E(X)$, $E(Y)$ et $E(Z)$ c) Déterminer une valeur approchée à 0,01 près par excès, de la valeur minimale de p telle que $p(z = 3) > 0,5$.

Exercice 19

On lance deux dés équilibrés, on note U_1 et U_2 les variables aléatoires correspondant aux résultats obtenus. On appelle $X = \min(U_1, U_2)$ et $Y = \max(U_1, U_2)$. 1. Donner la loi de X . En déduire $E(X)$. 2. Exprimer $X + Y$ en fonction de U_1 et U_2 . En déduire $E(Y)$. 3. Exprimer XY en fonction de U_1 et U_2 . En déduire $Cov(X, Y)$.

Exercice 20

On suppose qu'à la naissance, la probabilité qu'un nouveau-né soit un garçon est égale à $1/2$. On suppose que tous les couples ont des enfants jusqu'à obtenir un garçon. On souhaite évaluer la proportion de garçons dans une génération de cette population. On note X le nombre d'enfants d'un couple et P la proportion de garçons. 1. Exprimer P en fonction de X . 2. Donner la loi de la variable aléatoire X . 3. Que vaut $E(P)$? Qu'en pensez-vous ?

Exercice 21

Soit $p \in]0, 1[$. On dispose d'une pièce amenant "pile" avec la probabilité p . On lance cette pièce jusqu'à obtenir pour la deuxième fois "pile". Soit X le nombre de "face" obtenus au cours de cette expérience. 1. Déterminer la loi de X . 2. Montrer que X admet une espérance, et la calculer. 3. On procède à l'expérience suivante : si X prend la valeur n , on place $n + 1$ boules numérotées de 0 à n dans une urne, et on tire ensuite une boule de cette urne. On note alors Y le numéro obtenu. Déterminer la loi de Y . Calculer l'espérance de Y . 4. On pose $Z = X - Y$. Donner la loi de Z et vérifier que Z et Y sont indépendantes.

Exercice 22

On sait que la probabilité pour qu'une personne soit allergique à un certain médicament est égale à 10^{-3} . On s'intéresse à un échantillon de 1000 personnes. On appelle X la variable aléatoire dont la valeur est le nombre de personnes allergiques dans

l'échantillon. 1) Déterminer, en la justifiant, la loi de probabilité de X . 2) En utilisant une approximation que l'on justifiera, calculer les probabilités des événements suivants : a) Il y a exactement deux personnes allergiques dans l'échantillon. b) Il y a au moins deux personnes allergiques dans l'échantillon.

Exercice 23

On considère qu'il apparaît, en moyenne, chaque année 20 nouveaux cas de poliomyélite pour 100 000 habitants. On appelle X le nombre de nouveaux cas de poliomyélite dans l'année, dans une ville de 50 000 habitants (respectivement 5 000 habitants). 1) Montrer que la variable X suit une loi binomiale. 2) Montrer que l'on peut faire ici l'approximation de la loi binomiale par une loi de Poisson. 3) Calculer la probabilité pour qu'il apparaisse au plus quatre nouveaux cas de poliomyélite : a) dans une ville de 50 000 habitants. b) dans une ville de 5 000 habitants.

Exercice 24

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois :

x	1	2
P(X=x)	0,50	0,50

y	1	2	3
P(Y=y)	0,250	0,50	0,25

1) Calculer $E(X)$; $Var(X)$; $E(Y)$; $Var(Y)$. 2) Donner la loi de probabilité conjointe de X et Y . 3) Etablir la loi de probabilité de $T = X + Y$. Calculer $E(T)$ et $Var(T)$. 4) Etablir la loi de probabilité de $Z = XY$. Calculer $E(Z)$ et $Var(Z)$. 5) Vérifier par le calcul que $Cov(X, Y) = 0$.

Exercice 25

La probabilité d'observer une maladie dans une population est $P = 0,1$ et la maladie peut être détectée sans erreur par un dosage sanguin. On souhaite déterminer par ce dosage le nombre de personnes malades sur un échantillon de 100 personnes. Mais au lieu de tester le sérum de chaque individu, on partitionne au hasard l'échantillon en 10 groupes de 10 personnes dont on mélange les sérums. Si le test est négatif, sur l'un de ces mélanges, on considère que les 10 personnes correspondantes sont toutes négatives et l'on est ainsi dispensé des 10 tests individuels. Si, au contraire, le test est positif, c'est qu'alors au moins une personne est atteinte de la maladie et il faut alors tester séparément chacun des 10 sérums ayant participé au mélange, on doit donc, dans ce cas, effectuer 11 tests. 1) Trouver les probabilités pour que, dans un groupe, on observe :

- aucune personne malade,
- une et une seule personne malade,
- au moins une personne malade.

2) En désignant par N le nombre total de tests à effectuer avec cette méthode de partition pour un échantillon de 100 personnes, trouver les probabilités suivantes : $P(N = 110)$, $P(N = 100)$ 3) Calculer le nombre moyen de tests $E(N)$ et la variance du nombre des tests $Var(N)$.

Exercice 26

L'entreprise Luminex fabrique des lampes, dont 80% durent plus de 3000 heures. Des tests sont effectués sur des échantillons de taille $n = 15$. 1) Quelle est le nombre moyen de lampes qui ont une durée de vie inférieure à 3000 heures dans un échantillon de taille 15 ? 2) Quelle est la probabilité que toutes les lampes de l'échantillon durent plus de 3000 heures ? 3) Quelle est la probabilité que 13 lampes ou plus, dans un échantillon de taille 15, durent plus de 3000 heures ?

Exercice 27

Un standard téléphonique reçoit en moyenne 2 appels par minute. Les appels sont répartis au hasard dans le temps. 1) Quelle est la loi de probabilité régissant le nombre d'appels reçus en 3 minutes ? Quelle est la probabilité qu'il n'y ait aucun appel en 3 minutes ? 2) Quelle est la probabilité que le nombre d'appels en 2 minutes soit supérieur ou égal à 5 ?

Exercice 28

Le tableau ci-dessous donne la loi d'un couple de variables aléatoires $Z = (X, Y)$, avec X prenant ses valeurs dans $\{-1, 1\}$ et Y prenant ses valeurs dans $\{-1, 0, 1\}$.

$X \setminus Y$	-1	0	1
-1	1/12	1/3	1/12
1	1/6	1/6	1/6

1) Déterminer la probabilité que X et Y soient égales. 2) Déterminer les lois de X et de Y . 3) Déterminer les lois de $X + Y$ et de XY .

Exercice 29

Charles ne supporte pas les chats et Sophie déteste les chiens. Charles n'élève pas plus d'un chien et Sophie pas plus d'un chat. La probabilité pour que Charles ait un chien est de 0,2. Si Charles n'a pas de chien, la probabilité pour que Sophie ait un chat est de 0,1. On note X le nombre de chiens de Charles, Y le nombre de chats de Sophie et Z le nombre d'animaux du couple. 1) Calculer la probabilité pour qu'ils n'aient pas d'animaux. 2) On suppose de plus que la probabilité que Z soit égal à 1 est de 0,1. a) Calculer la probabilité pour que Z soit égal à 2. b) Déterminer l'espérance et l'écart-type de Z . c) Établir la loi de probabilité du couple (X, Y) . Quelle est la loi de probabilité de Y ? d) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Travaux Dirigés N°3 de Probabilité
Variables aléatoires absolument continues

Exercice 1

On admet que la durée de vie, mesurée en heures, d'une ampoule électrique d'un type donné est une variable aléatoire qui suit une loi normale de moyenne μ et d'écart type σ . Déterminer μ et σ sachant que :

$$\begin{cases} P(X > 1100) = 0,9332 \\ P(X < 1600) = 0,8413 \end{cases}$$

Exercice 2

Soit a un réel strictement positif et f la fonction de la variable t définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ f(t) = ae^{-at} & \text{si } t \in [-1, 1] \end{cases}$$

- 1) a) Montrer que, pour tout t de $\mathbb{R}$, $f(t) \geq 0$.
b) Pour tout x strictement positif, calculer, en fonction de x et de a , l'intégrale

$$I(x) = \int_0^x f(t)dt$$

- c) En déduire que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$. Conclure
2) Soit X la variable aléatoire dont la densité de probabilité est f . On se propose de calculer l'espérance mathématique de X .
a) Calculer, en fonction de x et de a l'intégrale $\int_0^x tf(t)dt = 1$.
b) En déduire que $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt = \frac{1}{a}$.
3) Calculer la variance de X .

Exercice 3

La variable aléatoire X suit la loi normale de moyenne 18 et d'écart type 3. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants : $X \leq 21$; $15 \leq X \leq 22$; $X \geq 16$; $X \geq 24$; $X \leq 15$; $20 \leq X \leq 24$; $14 \leq X \leq 17$

Exercice 4

La variable aléatoire X suit la loi normale de moyenne 2 et d'écart type 0,1. Calculer le réel a dans chacun des cas suivants : $P(X \leq a) = 0,90$; $15 \leq X \leq 22$; $P(X \geq a) = 0,20$; $P(X \geq a) = 0,10$; $P(X \geq a) = 0,75$; $P(2 - a \leq X \leq 2 + a) = 0,80$.

Exercice 5

Des machines fabriquent en série des plaques de tôles destinées au montage de transformateurs électriques. Ces plaques sont empilées et servent de conducteur au champ magnétique du transformateur. L'expérience montre que lors de la fabrication, la probabilité qu'une plaque tirée au hasard soit inutilisable est 0,001.

Partie A

On désigne par Y la v.a qui, à chaque plaque utilisable, associe son épaisseur exprimée en mm. On suppose que Y suit une loi normale de moyenne 0,3mm et d'écart type σ . Soit A l'événement : "une plaque tirée au hasard dans la production, a une épaisseur inférieure à 0,35mm".

- 1) On suppose $\sigma = 0,004mm$. Calculer $p(A)$ à 10^{-2} près.
2) On souhaite que $p(A) = 0,95$. Déterminer alors σ .

Partie B

La réalisation d'un transformateur nécessite un empilage de n plaques prises au hasard et numérotées de 1 à n (n entier naturel non nul). On désigne par Y_i la variable aléatoire prenant pour valeur l'épaisseur de la plaque numérotées i ($1 \leq i \leq n$). Chacune des variables Y_i suit la même loi que la variable de Y définie dans la première question de la partie A. Les n variables aléatoire Y_i sont mutuellement indépendantes. On appelle H_n la variable aléatoire prenant pour valeur la hauteur de l'empilage, c'est à dire $H_n = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$.

- 1) Calculer en fonction n l'espérance et la variance H_n .
2) On suppose que H_n suit une loi normale.

a) Montrer que la valeur maximale n_0 de n telle que $P(H_n < 125) \geq 0,975$ est solution de l'inéquation : $0,3n + 1,96x0,04\sqrt{n} - 125 \leq 0$.

b) En posant $y = \sqrt{n}$ résoudre cette inéquation et en déduire n_0 .

Exercice 6

Soit le couple de variables aléatoires continues (X, Y) de densité : $f(x, y) = \begin{cases} k\left(\frac{1}{x^2} + y^2\right) & \text{si } 1 \leq x \leq 5 \text{ et } -1 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

- 1) Pour quelle(s) valeurs de k la fonction f est-elle bien une densité ?
- 2) Calculer les densités marginales de X et de Y .
- 3) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
- 4) Déterminer la densité marginale de X sachant que $Y = 0$.
- 5) Calculer la covariance de X et Y .

Exercice 7

On considère une variable aléatoire X de densité $f(t) = \frac{c}{1+t^2}$

- 1) Pour quelle(s) valeur(s) de c la fonction f est-elle bien une densité ?
- 2) Calculer la fonction de répartition de X .
- 3) Déterminer $P(X > 0)$ et $P(-1 < X < 1)$.

Exercice 8

On appelle *durée de vie* d'un composant électronique la durée de fonctionnement de ce composant jusqu'à sa première panne éventuelle. On considère que la durée de vie d'un composant électronique est modélisée par une variable aléatoire T définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. On rappelle que la fonction de répartition F de T est définie pour tout réel t par $F(t) = P(T \leq t)$. On appelle alors loi de survie du composant la fonction D définie pour tout t de $\mathbb{R}_+$ par $D(t) = 1 - F(t) = P(T > t)$. On suppose que T est une variable aléatoire de densité f nulle sur $\mathbb{R}_+^*$, continue sur $\mathbb{R}_+$ et strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout réel t positif, on appelle coefficient d'avarie à l'instant t du composant le nombre $\pi(t)$ défini par

$$\pi(t) = \frac{f(t)}{D(t)}$$

1) Soit t un réel positif. Pour tout réel h strictement positif, on note $q(t, h)$ la probabilité que le composant tombe en panne entre les instants t et $t + h$ sachant qu'il fonctionne encore à l'instant t , c'est-à-dire le nombre $q(t, h)$ défini par :

$$q(t, h) = P(t < T \leq t + h | T > t)$$

- a) Etablir que pour tout réel h strictement positif, on a $q(t, h) = \frac{D(t) - D(t + h)}{D(t)}$
- b) Justifier que la fonction D est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, et préciser sa fonction dérivée.
- c) Montrer que le rapport $\frac{q(t + h)}{h}$ a pour limite $\pi(t)$ lorsque h tend vers 0 par valeurs supérieures.
- 2) On suppose dans cette question que λ est un réel strictement positif et que T suit la loi exponentielle de paramètre λ , c'est-à-dire que T est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et admet pour densité la fonction f définie par :

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

- a) Déterminer alors la loi de survie D du composant, et donner l'allure de sa courbe représentative.
- b) Calculer l'espérance mathématique $E(T)$ de T .
- c) Etablir que pour tout réel t positif, on a $\pi(t) = \frac{1}{E(T)}$.
- 3) Réciproquement, on suppose dans cette question qu'il existe une constante α strictement positive telle que pour tout réel t positif, $\pi(t) = \alpha$.
 - a) Soit g la fonction définie pour tout réel t positif par $g(t) = e^{at}D(t)$. Montrer que la fonction g est constante sur $\mathbb{R}_+$.
 - b) En déduire que T suit une loi exponentielle, et préciser son paramètre.
- 4) On suppose dans cette question que la densité f de la variable aléatoire T est définie par :

$$f(t) = \begin{cases} te^{-\frac{t^2}{2}} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

- a) Vérifier que la fonction f ainsi définie possède bien les propriétés d'une densité de probabilité.
- b) Déterminer la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ et établir que $\int_0^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.
- c) Calculer l'espérance mathématique $E(T)$ de T .
- d) Montrer que la variable aléatoire T^2 suit une loi exponentielle, et préciser son paramètre. En déduire la variance de T .
- e) Déterminer la loi de survie D du composant, et donner l'allure de sa courbe représentative en précisant la tangente au point d'abscisse 0 et le point d'inflexion.
- f) Calculer, pour tout réel t positif, le coefficient d'avarie $\pi(t)$ du composant.