
ALGEBRE IV

TD1 : Formes bilinéaires et formes quadratiques

Exercice 1.

On munit $\mathbb{R}^n$ de la base canonique $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, considérons une forme linéaire l , non nulle, définie par $l(e_i) = \alpha_i$ avec $\alpha_i \in \mathbb{R}$. Soit $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = l(x)l(y)$.

1. Montrer que f est une forme bilinéaire, symétrique.
2. Ecrire la matrice de f . Quel est le rang de f ? f est-elle dégénérée?
3. Déterminer $(\mathbb{R}^n)^\perp$ relativement à f et trouver sa dimension.
4. Si $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ sont les composantes de x et de y par rapport à la base $\mathcal{B}$, écrire l'expression de la forme bilinéaire f et de la forme quadratique associée en fonction des x_i et y_i .
5. Soit $v \in \mathbb{R}^n$ tel que $l(v) \neq 0$. Déterminer $(\mathbb{R}v)^\perp$ et déduire que $\mathbb{R}^n = (\mathbb{R}v) \oplus \text{Ker}(l)$.
En déduire une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^n$ telle que tous les termes de la matrice de f dans $\mathcal{B}'$ soient nuls sauf un seul d'entre eux. La base $\mathcal{B}'$ est-elle f -orthogonale?
6. Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie $n > 1$, muni d'une forme bilinéaire symétrique f et soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E .
 - (a) Montrer que si $E_1 \subset E_2$, alors on a $E_2^\perp \subset E_1^\perp$. Peut-on avoir $E_1 \neq E_2$ et $E_1^\perp = E_2^\perp$?
 - (b) Montrer que si $E_1 \subsetneq E_2$ et si $E_1^\perp = E_2^\perp$ alors f est dégénérée.

Exercice 2.

On munit $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$, soit q la forme quadratique définie par

$$q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3.$$

1. Ecrire la matrice B de q par rapport à $\mathcal{B}$. Quel est le rang de q ?
2. Ecrire la forme polaire f de q .
3. Déterminer l'ensemble F des vecteurs qui sont q -orthogonaux à e_1 .
4. En déduire que $\mathbb{R}^3 = (\mathbb{R}e_1) \oplus F$.
5. Trouver deux vecteurs q -orthogonaux v_2 et v_3 dans F qui sont linéairement indépendants. Ecrire la matrice B' de q en utilisant la base $\mathcal{B}' = \{e_1, v_2, v_3\}$. Vérifier que $B' = {}^tPBP$ où P est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 3.

Soit $\mathbb{R}_n[X]$, l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n ($n > 1$). Pour tous $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose

$$B(P, Q) = \int_0^1 tP(t)Q'(t)dt \quad \text{et} \quad q(P) = B(P, P).$$

1. Montrer que B est une forme bilinéaire. Est-elle symétrique? antisymétrique?
2. Justifier que q est une forme quadratique. Est-elle définie?
Si ce n'est pas le cas, exhiber un vecteur isotrope non nul de q .

3. Calculer la matrice de q dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
4. Pour $n = 2$, déterminer la signature de q . La forme q est-elle positive ? négative ?
5. Déterminer une base de $\mathbb{R}_2[X]$ qui soit q -orthogonale.

Exercice 4.

Soit φ , la forme définie sur $\mathbb{R}_2[X]$, pour tous $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$, par $\varphi(P, Q) = P(1)Q(-1) + P(-1)Q(1)$ et q sa forme quadratique.

1. Montrer que φ est une forme bilinéaire symétrique.
2. Déterminer sa matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. On considère la famille $\mathcal{B}' = \{1 - X^2, X, X^2\}$
 - (a) Vérifier que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
 - (b) Déterminer la matrice A' de φ dans $\mathcal{B}'$.
 - (c) En déduire une base q -orthogonale.
 - (d) Déterminer dans $\mathcal{B}'$, l'expression de φ et déduire la signature de q .
4. Déterminer le noyau de q .
5. Déterminer l'ensemble des vecteurs isotropes de q .
6. Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X] / P(0) = 0\}$. Déterminer l'orthogonale de F relativement à φ .

Exercice 5.

Soit $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels.

On considère E une partie de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par :

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}); a - d = 0 \right\} \text{ et } J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On définit l'application $B : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ par $B(M, N) = \text{Tr}(MJN)$.

1. Montrer que B est une forme bilinéaire. Est-elle symétrique ? antisymétrique ?
2. Déterminer une base $\mathcal{C}$ de E .
3. Déterminer la matrice de la forme quadratique q de B dans $\mathcal{C}$.
4. Déterminer la signature de q , son rang et son noyau.
La forme q est-elle définie ? positive ? négative ?
5. Déterminer l'ensemble des vecteurs isotropes de q .
6. Déterminer une base q -orthogonale de F où $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}); a - d = 0 \right\}$.

Exercice 6.

Soit $E_n = \mathbb{R}^n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leq n$ à coefficients réels. Pour tout $P \in E_n$, on pose :

$$Q(P) = \int_0^1 P^2(t) dt.$$

1. Montrer que Q est une forme quadratique, définie positive. Ecrire la relation de Cauchy-Schwarz.
2. Calculer la matrice M de Q par rapport à la base $\mathcal{B} = \{1, X, \dots, X^n\}$ de E_n .
3. Montrer que la forme quadratique suivante sur $\mathbb{R}^{n+1}$ est définie positive :

$$Q_1(x_0, \dots, x_n) = \sum_{i,j=0}^n \frac{x_i x_j}{i+j+1}.$$

Déduire son rang et sa signature.

Exercice 7.

Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit la relation "être congruente à", notée $\mathcal{C}$, par

$$A \mathcal{C} B \iff (\exists P \in \text{GL}_n(\mathbb{R}), B = {}^tPAP).$$

1. Montrer que $\mathcal{C}$ est une relation d'équivalence dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Quels liens y a-t-il entre congruence, équivalence et semblable ?

On rappelle que :

- Deux matrices A, B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont dites équivalentes ssi

$$\exists P, Q \in \text{GL}_n(\mathbb{R}), B = QAP).$$

- Deux matrices A, B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont dites semblables ssi

$$\exists P \in \text{GL}_n(\mathbb{R}), B = P^{-1}AP).$$

3. A-t-on : $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall A, B, A', B' \in \text{GL}_n(\mathbb{R}), (A \mathcal{C} B \text{ et } A' \mathcal{C} B') \implies \alpha A + A' \mathcal{C} \alpha B + B' ?$
4. Montrer que $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), (A \mathcal{C} B \implies {}^tA \mathcal{C} {}^tB).$
5. Soit $M \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), (A \mathcal{C} B \implies {}^tMAM \mathcal{C} {}^tMBM).$ La propriété subsiste-t-elle si on suppose seulement $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) ?$
6. Soient $A, B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}), A', B' \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$. Montrer que si $A \mathcal{C} B$ et $A' \mathcal{C} B'$ alors $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix} \mathcal{C} \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & B' \end{pmatrix}.$
7. Soient $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A et B sont congruentes ssi elles représentent une même fbs sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dans deux bases.

Exercice 8.

1. On munit $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique. Considérons les deux formes bilinéaires symétriques $f_1(x, y) = x_1y_1, f_2(x, y) = x_1y_1 - x_3y_3$ où $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$. Trouver les noyaux $\text{Ker}(f_1)$ et $\text{Ker}(f_2)$ et les ensembles I_1 et I_2 des vecteurs isotropes de f_1 et f_2 . I_1 et I_2 sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?
2. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n et f une forme bilinéaire symétrique, dont l'ensemble des isotropes est noté I .
 - (a) Ecrire la relation d'inclusion entre $\text{Ker}(f)$ et I .
 - (b) Montrer que $\text{Ker}(f) \subsetneq I$ ssi $\exists x_0 \in I$ et $y_0 \in E$ tels que $f(x_0, y_0) \neq 0$.
 - (c) Montrer que si I est un sev de E alors $\text{Ker}(f|_I) = I$.
 - (d) Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et q la forme quadratique associée à f . Montrer que $I = \text{Ker}(f)$ si q est positive ou négative.

Exercice 9.

On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$. On note $\mathcal{B}$, la base canonique de E . Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ et q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ par

$$q(x_{1,2}, x_3, x_4) = x^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + ax_4^2 + 2x_1x_2 + 4bx_1x_3 + 4bx_2x_3 + 2cx_2x_4.$$

1. Déterminer la forme polaire de q ainsi que la matrice de q dans $\mathcal{B}$.
2. Déterminer une réduction en carrés de Gauss de q .
3. Déterminer le rang et la signature de q en fonction des paramètres a, b, c .

4. En prenant $(a, b, c) = (2, 0, 1)$, déterminer une base de E qui soit q -orthogonale.

Exercice 10.

Pour tout réel a , soit q_a la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ définie par

$$q_a(x_1, x_2, x_3) = a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3).$$

1. Pour quelles valeurs de a la forme quadratique q_a est-elle non dégénérée ?
2. Montrer qu'il existe une même base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ qui est orthogonale pour tous les q_a .
3. Soit D la droite vectoriel engendrée par le vecteur $v = (2, 2, 1)$. Trouver une base de l'orthogonal $D^\perp$ de D pour q_0 . D et $D^\perp$ sont-elles supplémentaires ?
4. Montrer que la forme quadratique q_a est définie positive si et seulement si $a > 2$.

Exercice 11.

Soit q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ définie par $q(x, y, z) = x^2 + 4xy + 6xz + 4y^2 + 16yz + 9z^2$.

1. Déterminer la forme polaire φ associée à q .
2. Déterminer la matrice A de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. Décomposer q en combinaison linéaire de carrés de formes linéaires linéairement indépendantes.
En déduire le rang et la signature de q .
4. Déterminer une base φ -orthogonale de $\mathbb{R}^3$ noté $\mathcal{C}$.
5. Déterminer la matrice B de φ dans $\mathcal{C}$.
6. Pour tout réel λ , on note $v_\lambda = (\lambda, -1, 1)$ et F_λ l'orthogonal de v_λ pour φ .
 - (a) A quelle condition de λ le vecteur v_λ est-il un vecteur isotrope pour q ?
 - (b) Montrer que $\dim F_\lambda = 2$.
 - (c) A quelle condition sur le réel λ a-t-on en somme direct de F_λ et $\mathbb{R}v_\lambda$? Justifier votre réponse.

Exercice 12.

Soit a un paramètre réel. On considère la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ définie par

$$q_a((x_1, x_2, x_3)) = x_1^2 + (1+a)x_2^2 + (1+a+a^2)x_3^2 + 2x_1x_2 - 2ax_2x_3.$$

1. Donner la matrice de q_a dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la *f.b.s* associée à q_a .
3. Donner la décomposition de Gauss de q_a .
4. Donner le noyau, le rang et la signature de q_a .
5. Déterminer une base q_a -orthogonal de $\mathbb{R}^3$.
6. Pour quelles valeurs de a , q_a est définie positive.

Exercice 13.

Pour tout réel m , soit q_m la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ définie par

$$q_m(x, y, z) = mx^2 + 2(m+1)y^2 + (m+1)^2z^2 + 2mxy + 2mzx - 4yz.$$

1. Pour quelles valeurs de m la forme quadratique q_m est-elle non dégénérée ?
2. Déterminer la réduction de Gauss de q_m .
3. Déterminer une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ qui est orthogonale pour tous les q_m .
4. Pour quelles valeurs de m la forme quadratique q_m est-elle définie positive ?

ALGEBRE IV

TD2 : Espaces euclidiens et Produits scalaires

Exercice 1.

On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique.

1. Montrer que pour tout $x = (x_i) \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 \leq n \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right).$$

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A = [a_{ij}]$. Calculer $\text{tr}(A^t A)$ en fonction des a_{ij} .

En déduire l'inégalité $|\text{tr}(A)| \leq \sqrt{n \text{tr}(A^t A)}$ pour toute matrice A .

3. Montrer que sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'application $A, B \mapsto \text{tr}(A^t B)$ définit un produit scalaire.
4. Montrer que pour toutes matrices A et B symétriques, on a $|\text{tr}(AB)|^2 \leq (\text{tr}(A^2))(\text{tr}(B^2))$.

Exercice 2.

Soit A une matrice symétrique réelle d'ordre n .

On pose pour toutes matrices colonnes d'ordre n , X et Y , $\varphi(X, Y) = {}^t X A Y$. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée constituée de vecteurs propres de A et $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, les valeurs propres de A .

Soient $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ dans $\mathcal{B}$.

1. Montrer que $\varphi(X, Y) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i y_i$.
2. Montrer que l'application $(X, Y) \mapsto \varphi(X, Y)$ définit un produit scalaire si et seulement si toutes les valeurs propres de A sont strictement positives.

Exercice 3.

Soit $E = \mathbb{R}^d$ ($d > 1$) l'espace euclidien muni de son produit scalaire canonique

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^d (x_i y_i).$$

Soit u un vecteur unitaire et V le plan perpendiculaire à u passant par l'origine.

1. Trouver une équation de V portant sur les coordonnées x_j d'un point x de E pour que $x \in V$.
2. Pour tout x dans E trouver un réel $\lambda = \lambda(x)$ tel que $x - \lambda u \in V$.
3. Soit $P(x)$ la projection orthogonale de x sur V . Exprimer $P(x)$ en fonction de x et de u .
4. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de P .

Exercice 4.

Soit E l'espace vectoriel réel des fonctions réelles continues sur $I = [0, 1]$.

1. Montrer que pour tout f de E , l'intégrale $\int_0^1 f(t) \ln\left(\frac{1}{t}\right) dt$ converge.
2. Pour tout réel $\alpha \geq 0$, on pose $u_\alpha = \int_0^1 t^\alpha \ln\left(\frac{1}{t}\right) dt$. Calculer u_α en fonction de α .
3. On pose $N(f) = \left(\int_0^1 (f(t))^2 \ln\left(\frac{1}{t}\right) dt\right)^{\frac{1}{2}}$. Montrer qu'il existe un produit scalaire $\langle f, g \rangle$ sur E que l'on explicitera tel que $N(f) = \langle f, f \rangle^{\frac{1}{2}}$. En déduire que N est une norme.

- On pose respectivement a_0, a_1 et a_2 les éléments $t \mapsto 1, t \mapsto t$ et $t \mapsto t^2$ de E . Construire une b.o.n de $F_2 = Vect(a_0, a_1, a_2)$.
- Soit a l'élément $t \mapsto t^{\frac{1}{2}}$ de E . Calculer explicitement les projections orthogonales de a sur $G_0 = Vect(a_0)$ et sur $G_1 = Vect(a_1)$.
- Soit a' la projection orthogonale de a sur $F_1 = Vect(a_0, a_1)$. Déterminer les projections orthogonales de a' sur G_0 et sur G_1 .

Exercice 5.

Soit $H = \mathcal{C}([-1, 1])$ l'espace vectoriel réel des fonctions continues sur $I = [-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$.

- Montrer que l'application $(f, g) \mapsto \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$ de $H \times H$ dans $\mathbb{R}$ définit un produit scalaire réel sur H . Ecrire la norme associée.
- Considérons les deux sous-espaces vectoriels de H définis par $F = \{f \in H / f(x) = 0, \forall x \in [-1, 0]\}$ et $G = \{f \in H / f(x) = 0, \forall x \in [0, 1]\}$.
Montrer que $F = G^\perp$ et que $G = F^\perp$. A-t-on $H = F \oplus G$?
- Soit la fonction $h(t) \equiv 1$ pour tout $t \in I$. Montrer que h n'a pas de projection orthogonale sur F .
- Soit E le sous-espace de H formé par les restrictions à I des polynômes à coefficients réels. Soit f_0 une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I qui est non polynomiale et telle que pour une constante $k > 0$, on ait

$$\sup_{-1 \leq x \leq 1} |f_0^{(n)}(x)| \leq k, \forall n \geq 0$$

Montrer en utilisant la formule de Taylor- Lagrange que $\forall \varepsilon > 0, \exists P \in E$ tel que $\|f_0 - P\| \leq \varepsilon$.

- En déduire que la projection orthogonale de f_0 sur E n'existe pas. Quel est l'orthogonal de E ?

Exercice 6.

Soit E , un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension n . Soient $u_1, u_2, \dots, u_p \in \mathcal{L}(E)$, des autoadjoints

tels que $rg(u_1) + rg(u_2) + \dots + rg(u_p) = n$ et $\forall x \in E, \sum_{i=1}^p \langle u_i(x), x \rangle = \langle x, x \rangle$.

Posons $v = \sum_{i=1}^p u_i - Id_E$.

- Montrer que $v^* = -v$.
- En déduire que $u_1 + u_2 + \dots + u_p = Id_E$.
- Montrer que $E = Im(u_1) \oplus Im(u_2) \oplus \dots \oplus Im(u_p)$.
- Calculer $u_i \circ u_j$. Que peut-on dire de $Im(u_i)$ et $Im(u_j)$? si $i \neq j$, justifier.
- En déduire que u_i est le projecteur orthogonal sur $Im(u_i)$.

Exercice 7.

Soit E un espace Euclidien de dimension n . Soit $S = (u_1, \dots, u_p)$ un système de p vecteurs de E avec $p \leq n$. La matrice de Gram de ce système est définie comme étant la matrice $G(S) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ de terme général

$$G(S)_{ij} = \langle u_i, u_j \rangle.$$

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension p contenant les u_i . Rapportons F à une b.o.n et soit U la matrice $p \times p$ dont la j^e colonne C_j est formée par les composantes du vecteur u_j .

- Montrer que $G(S) = ({}^t U).U$.

2. En déduire que $\det(G(S)) \geq 0$, à quelle condition sur S ce déterminant est nul. Montrer que $\det(G(S))$ ne dépend pas de l'ordre dans lequel on place les vecteurs.
3. On remplace S par le système $S' = (u'_1, \dots, u'_p)$ qui se déduit de S par la substitution linéaire d'une matrice P tel que ${}^t S' = P {}^t S$. Montrer que $\det(G(S')) = (\det P)^2 \det(G(S))$.
4. Montrer que quels que soient p vecteurs $u_1, \dots, u_p$ d'un espace Euclidien de E de dimension p on a la majoration

$$|\det(u_1, \dots, u_p)| \leq \|u_1\| \|u_2\| \cdots \|u_p\|.$$

5. On suppose S libre et $p < n$. Soit F le sous-espace de E engendré par S . Montrer que la distance de tout point x de E à F est égale à

$$d(x, F) = \sqrt{\frac{\det G(x, u_1, \dots, u_p)}{\det G(u_1, \dots, u_p)}}.$$

Exercice 8.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $\forall V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \|AV\| \leq \|V\|$, où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne canonique sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

1. Montrer : $\forall V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \|{}^t AV\| \leq \|V\|$.
2. Montrer : $\forall V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), (AV = V \iff {}^t AV = V)$.
3. Etablir que $\ker(A - I_n)$ et $\text{Im}(A - I_n)$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Exercice 9.

Soit V un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace H à produit scalaire et soit x' la projection orthogonale sur V d'un x quelconque de H . Montrer que

1. Pour tout $y \in V$, on a : $\|x - y\|^2 = \|x - x'\|^2 + \|y - x'\|^2$ et que

$$\|x - x'\| = \min_{y \in V} \|x - y\| \implies y = x'.$$

2. Pour tout x dans H , la projection orthogonale de x sur V est l'unique point p de V tel que $\forall y \in V$, on a $\langle x, y \rangle = \langle p, y \rangle$.
3. $H = V \oplus V^\perp$.

Exercice 10.

Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. On suppose que $u^2 = 0$. Montrer que $\text{Ker}(u + u^*) = \text{Ker}(u) \cap \text{Ker}(u^*)$.
2. On suppose que $u \circ u^* = u^* \circ u$. Montrer que :
 - (a) $\|u^*(x)\| = \|u(x)\|$ pour tout $x \in E$.
 - (b) $\text{Ker}(u) = \text{Ker}(u^*)$.
 - (c) $\text{Sp}(u) = \text{Sp}(u^*)$ et que pour toute valeur propre, les sous-espaces propres de u et de u^* sont identiques.
 - (d) Les sous-espaces propres de u sont deux à deux orthogonaux.
3. Soit F un sous-espace vectoriel de E , stable par u .
 - (a) Montrer que $F^\perp$ est aussi stable par u^* .
 - (b) Montrer que $\text{Ker} u^* = (\text{Im} u)^\perp$ et $\text{Im} u^* = (\text{Ker} u)^\perp$.
 - (c) En déduire que $\text{rg}(u^*) = \text{rg}(u)$.

Exercice 11.

Soit E un espace euclidien et f un endomorphisme de E .

1. On pose $g = f^* \circ f$. Montrer que :
 - (a) g est un autoadjoint positif.
 - (b) si f est inversible alors g est défini positif.
 - (c) $\text{Ker}(g) = \text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(g) = \text{Im}(f^*)$.
2. Supposons que E est de dimension finie. Soit F un sev de E , stable par f .
 - (a) Montrer que $F^\perp$ est aussi stable par f^* .
 - (b) Montrer que $\text{Ker} f^* = (\text{Im} f)^\perp$ et $\text{Im} f^* = (\text{Ker} f)^\perp$.
 - (c) En déduire que $rg(f^*) = rg(f)$.
3. Supposons que $\forall x \in E, \langle f(x), x \rangle = 0$.
 - (a) Démontrer que $f^* = -f$.
 - (b) En déduire que $\text{Ker}(f) = \text{Im}(f)^\perp$.

Exercice 12.

Soit E un espace euclidien de dimension n et f un endomorphisme de E .

1. (a) Montrer que la matrice de f^* dans une base orthonormée de E est la transposée de celle de f .
 - (b) En déduire que $rg(f^*) = rg(f)$.
 - (c) Montrer que l'application : $f \mapsto f^*$ est un automorphisme involutif de $\mathcal{L}(E)$.
 - (d) Montrer que pour tous f, g de $\mathcal{L}(E)$, on a : $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$.
 - (e) On suppose que f est un automorphisme de E .
Vérifier que $\text{Id}_E^* = \text{Id}_E$.
Montrer que f^* est un automorphisme et que $(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$.
2. Soit E un espace préhilbertien sur $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{L}(E)$.
Montrer que $f = 0 \iff \forall x \in E, \langle f(x), x \rangle = 0$.

Exercice 13.

On considère l'espace vectoriel E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur E vérifiant l'identité du parallélogramme, c'est à dire $\forall (x, y) \in E^2$,

on a : $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$.

On se propose de démontrer que $\|\cdot\|$ est associée au produit scalaire.

On définit sur E^2 une application f par : $\forall (x, y) \in E^2, f(x, y) = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$.

1. Montrer que pour tout $\forall (x, y, z) \in E^3$, on a : $f(x + z, y) + f(x - z, y) = 2f(x, y)$.
2. Montrer que pour tout $\forall (x, y) \in E^2$, on a : $f(2x, y) = 2f(x, y)$.
3. Montrer que pour tout $\forall (x, y) \in E^2$ et pour tout entier naturel n , on a : $f(nx, y) = nf(x, y)$.
4. En déduire que pour tout $\forall (x, y) \in E^2$ et pour tout rationnel r , on a : $f(rx, y) = rf(x, y)$.
5. En déduire que pour tout $\forall (x, y) \in E^2$ et pour tout réel r , on a : $f(rx, y) = rf(x, y)$.
6. Montrer que pour tout $\forall (u, v, w) \in E^3$, on a : $f(u, w) + f(v, w) = f(u + v, w)$.
(Indication : on pourra poser $x = \frac{1}{2}(u + v)$ et $y = \frac{1}{2}(u - v)$).
7. Montrer que f est bilinéaire.
8. Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme euclidienne.

ALGEBRE IV

TD3 : Endomorphismes des espaces euclidiens et des espaces hermitiens

Exercice 1.

Soient f et g deux endomorphismes d'un espace euclidien E et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que :

1. $(\lambda f + g)^* = \lambda f^* + g^*$.
2. $(Id_E)^* = Id_E$.
3. $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.
4. $(f^*)^* = f$.

Exercice 2.

Soit E un espace euclidien, u un endomorphisme de E et u^* son adjoint.

1. Montrer que $uu^* + u^*u = 0 \implies u = 0$.
2. Montrer que $Ker(u^*) = (Im u)^\perp$ et $Im(u^*) = (Ker u)^\perp$.
3. En déduire que u^* injective $\implies u$ surjective et u^* surjective $\implies u$ injective.
4. Montrer que $Ker(u^* \circ u) = Ker u$ et $Im(u^* \circ u) = Im u^*$.

Exercice 3.

1. Soit u un endomorphisme symétrique de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$.
 - (a) Montrer que $u^2 = 0 \implies u = 0$.
 - (b) En général, montrer que s'il existe un entier $p > 1$ tel que $u^p = 0$, alors $u = 0$.
2. Soit A une matrice symétrique à coefficients réels. Montrer que si $A^2 = 0$ alors $A = 0$.
Trouver un contre-exemple pour A non symétrique.

Exercice 4.

Soit E un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. On suppose que $\forall x, y \in E, \langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle$. Montrer que $Im(f) = Ker(f)^\perp$.
2. On suppose que f conserve l'orthogonalité, c'est à dire $\forall x, y \in E, x \perp y \implies f(x) \perp f(y)$.
 - (a) Montrer que $\|x\| = \|y\| \implies \|f(x)\| = \|f(y)\|$.
 - (b) Montrer qu'il existe un réel α positif tel que pour tout vecteur x de E , on a $\|f(x)\| = \alpha\|x\|$.

Exercice 5.

Soit u un endomorphisme symétrique défini positif d'un espace euclidien E de dimension n et soit y un vecteur de E . Montrer que l'équation $u(x) = y$ a une unique solution s et que s est le point où la fonction suivante définie sur E atteint son minimum

$$f(x) = \frac{1}{2} \langle u(x), x \rangle - \langle y, x \rangle.$$

Exercice 6.

Soit f un endomorphisme inversible de l'espace euclidien E de dimension n .

1. $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base orthonormée de vecteurs propres de $f^* \circ f$ et soit λ_j la valeur propre associée à e_j pour $j = 1, \dots, n$. Calculer les $\|f(e_j)\|$ en fonction des λ_j . Existe-t-il des λ_j nuls ?

2. Trouver les meilleurs constantes m et M telles que

$$\forall x \in E, m\|x\|^2 \leq \|f(x)\|^2 < M\|x\|^2.$$

3. Application. On prend $E = \mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire usuel et f dans $\text{End}(E)$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Trouver le plus grand réel α tel que $\|f(x)\| \geq \alpha \|x\|$ pour tout $x \in E$.

Exercice 7.

Soit H un espace hermitien et $u \in \text{End}(H)$. On pose $V = \frac{u + u^*}{2}$.

1. Montrer que V est un endomorphisme hermitien .
2. Montrer que $\forall x \in H, \text{Re}(\langle u(x), x \rangle) = \langle V(x), x \rangle$.
3. Soit $\lambda \in \text{Sp}\{u\}$. Montrer que $\exists x \neq 0$ dans H , tel que $\bar{\lambda} = \frac{\langle u(x), x \rangle}{\|x\|^2}$.

Exercice 8.

Soit H un espace hermitien de dimension n .

1. Soit F un sous-espace vectoriel de H et P l'opérateur de projection orthogonale sur F . Montrer que P est hermitien et que $\langle P(x), x \rangle \geq 0, \forall x \in H$.
2. Inversement, soit $P \in \text{End}(H)$ tel que $P^2 = P$ et $P^* = P$. Montrer que P est la projection orthogonale sur $\text{Im}(P)$.
3. Soit $P \in \text{End}(H)$ tel que $P^2 = P$. Montrer que P est la projection orthogonale sur $\text{Im}(P^*)$.

Exercice 9.

Soit H un espace hermitien de dimension n . Soit I l'application identité de H et $A \in \text{End}(H)$.

1. Montrer que si x est un vecteur propre non nul de A associé à la valeur propre λ , et si x est aussi un vecteur propre non nul de A^* associé à la valeur propre μ , alors $\lambda = \bar{\mu}$. En déduire que $\lambda = \mu$ ssi λ est un réel.
2. Montrer que l'opérateur AA^* est hermitien et que ses valeurs propres sont positives ou nulles.
3. Soit λ une valeur propre non nulle de A .

Que peut-on dire de λ si A est anti-hermitien c'est-à-dire si $A = -A^*$.

Que peut-on dire de λ si A est anti-unitaire c'est-à-dire si $AA^* = A^*A = -I$.

En déduire qu'il n'existe pas d'opérateurs anti-unitaire sur H . Pouvait-on prévoir ce résultat ?

4. On pose $B = \frac{A + A^*}{2}$ et $C = \frac{A - A^*}{2i}$. Que peut-on dire de B et C ?

Soit donc l'opérateur $A = B + iC$. Montrer que si $AA^* = -A^*A$, alors $A = 0_H$.

5. On pose $u = AA^* + A^*A$ et $v = iu$. On suppose que A, A^* et u ont un vecteur propre commun x pour une même valeur propre λ . Montrer que $\lambda = \frac{1}{2}$ ou $\lambda = 0$.
6. Que peut-on dire de v . En déduire que v et u n'ont pas de valeurs propres communes non nulles.

Exercice 10.

Soit H un espace hermitien de dimension n .

1. Soit $\mathcal{B} = (e_k)$ une base orthonormée de H .

Montrer que $\forall x \in H$, on a $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^n |\langle x, e_k \rangle|^2$.

2. Soit $A \in \text{End}(H)$ et $\mathcal{B}' = (e'_l)$ une deuxième base orthonormée de H .
 - (a) Montrer que $\sum_{l=1}^n \|A^* e'_l\|^2 = \sum_{k=1}^n \|A e_k\|^2$.
 - (b) Montrer que $\sum_{l=1}^n \|A e'_l\|^2 = \sum_{k=1}^n \|A e_k\|^2$.
3. Soit φ la forme définie pour $A, B \in \text{End}(H)$ par $\varphi(A, B) = \sum_{k=1}^n \langle A e_k, B e_k \rangle$.
 - (a) Montrer que φ est un produit scalaire sur $\text{End}(H)$ et déduire la norme N associée à φ .
 - (b) En déduire que N ne dépend pas de la b.o.n de H choisie.
4. Calculer $(N(A))^2$, $\text{tr}(AA^*)$ et $\text{tr}(A^*A)$.

Exercice 11.

Soit E un espace hermitien de dimension finie n et $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E .

Soit u un endomorphisme de E . On définit l'application $f : E \times E \rightarrow \mathbb{C}$

par $f(x, y) = \langle u(x), u(y) \rangle$, $\forall (x, y) \in E \times E$.

1. Montrer que f est une forme sesquilinéaire hermitienne.
2. Comparer les noyaux de u et de f .
3. Soit A la matrice de u dans $\mathcal{B}$. Quelle est la matrice de f en fonction de A dans $\mathcal{B}$?
4. En déduire que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a : $\text{rang}({}^t \bar{A} A) = \text{rang}(A)$.
5. Montrer que si u est inversible, la forme f est définie positive.
6. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, une matrice hermitienne dont toutes les valeurs propres sont positives. Montrer qu'il existe une matrice hermitienne H telle que $H^2 = M$ (Diagonaliser M à l'aide d'une matrice unitaire).
7. Démontrer que pour toute matrice A inversible, il existe une matrice hermitienne H telle que ${}^t \bar{A} A = H^2$. Démontrer en plus que ${}^t \bar{A}^{-1} H$ est unitaire.
8. En déduire que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une matrice inversible, alors il existe une matrice unitaire U et une matrice hermitienne H telles que $A = UH$.