
ALGEBRE III

TD1 : Polynômes d'endomorphismes et Diagonalisation

Exercice 1. Diagonaliser si-possible les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 2.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Diagonaliser A puis calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer A^n .

2. Même questions avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 3. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ et $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tels que $f(X) = XA - AX$.

1. Déterminer le noyau de f .
2. Montrer que f est diagonalisable.

Exercice 4. Déterminer les sous-espaces propres et les sous-espaces caractéristiques de :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 5. Déterminer le polynôme minimal des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 & -6 \\ -6 & 4 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ -6 & 3 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

Exercice 6. Pour quelles valeurs de a , b et c les matrices suivantes sont-elles diagonalisables ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ a & b & c \end{pmatrix}.$$

Exercice 7.

1. Démontrer que :
 - (a) La seule valeur propre d'un endomorphisme nilpotent est zéro.
 - (b) Les seules valeurs propres d'une projection sont zéro et un.
2. Soit f un endomorphisme de E . Montrer que si f est une projection, alors f est diagonalisable.

3. Soit un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension n et u un endomorphisme de E possédant n valeurs propres distinctes. Montrer qu'un endomorphisme v de E est tel que $u \circ v = v \circ u$ si et seulement si les vecteurs propres de u sont des vecteurs propres de v .

Exercice 8. On considère E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension 4 et on note $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq 4}$ une base de E . Soit les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On note f l'endomorphisme de E de matrice A dans $\mathcal{B}$.

- Donner une base de $\text{Im}(f)$ et de $\text{Ker}(f)$.
- Soit y un vecteur de non nul de $\text{Im}(f)$.
 - Montrer que y est un vecteur propre de f . Quelle est la valeur propre associée ?
 - Déterminer les valeurs propres de f .
 - L'endomorphisme f est-il diagonalisable ? Si oui, déterminer une base dans laquelle la matrice de f est diagonale.
- Déterminer à l'aide des valeurs propres de A celles de B ainsi que les sous-espaces propres correspondants.
 - Montrer que B est diagonalisable et diagonaliser B avec une matrice de passage dont les éléments de la première ligne et ceux de la deuxième colonne sont égaux à 1.

Exercice 9.

Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie, $P \in \mathbb{K}[X]$ et $u \in \text{End}_K(E)$.

On note $P(\text{Sp}(u)) = \{P(\lambda); \lambda \in \text{Sp}(u)\}$.

- On suppose que u est diagonalisable. Montrer que $P(\text{Sp}(u)) = \text{Sp}(P(u))$.
- Montrer, dans le cas général, que $P(\text{Sp}(u)) \subset \text{Sp}(P(u))$.
- Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, montrer que $\text{Sp}(P(u)) \subset P(\text{Sp}(u))$. Ce résultat est-il vrai lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$?

Exercice 10. Déterminer la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1, & u_1 = 2, & u_2 = -2 \\ u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n \end{cases}$$

Exercice 11. Soit E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie $n > 0$, u et v deux endomorphismes de E vérifiant : $uv - vu = u$.

- Montrer que : $u^k v - v u^k = k u^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
- En déduire que u est nilpotent.

Exercice 12. Soient U et V deux matrices carrées (n, n) . On considère les deux matrices

$$A = \begin{pmatrix} O & U \\ V & O \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} O & O \\ -V & O \end{pmatrix} \quad \text{où } O \text{ désigne la matrice carrée } (n, n) \text{ nulle.}$$

Soit λ un nombre réel.

- Calculer de deux manières le déterminant de la matrice $(A - \lambda I)(B - \lambda I)$.
- En déduire le polynôme caractéristique de A en fonction de celui de UV .
- Montrer que UV et VU ont le même polynôme caractéristique.

Exercice 13 : On fixe une matrice A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soit φ_A l'application définie par $\varphi_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), B \mapsto AB$.

- Montrer que φ_A est linéaire.

2. Calculer $\varphi_A^2(B)$, puis $\varphi_A^k(B)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. En déduire que si P est un polynôme, alors $P(\varphi_A) = \varphi_{P(A)}$.
3. En déduire que P est un polynôme annulateur de A si et seulement si P est un polynôme annulateur de φ_A .
4. Montrer que φ_A est diagonalisable si et seulement si A l'est.

Exercice 14 : On considère la matrice carrée d'ordre $n \geq 2$: $J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

1. Calculer J^2 en fonction de J .
2. En déduire les valeurs propres de J et calculer leurs multiplicités.
3. Quel est le polynôme minimal de J ?
4. Donner le polynôme caractéristique de J .

Exercice 15.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $M^4 = M^2$.

1. Calculer $(I_n + M)(M^2 - M^3)$ et en déduire que si $I_n + M$ est inversible alors $M^3 = M^2$.
2. Déterminer deux polynômes P et Q tels que $(1 + X)P + (X^2 - X^3)Q = 1$.
3. Montrer que si $M^3 = M^2$, alors $I_n + M$ est inversible et déterminer l'inverse de $I_n + M$ comme polynôme en M .
4. Déterminer les valeurs propres de M .
5. Montrer que M est diagonalisable si et seulement si $M^3 = M$.

Exercice 16.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $f_A(M) = AM$, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que si $A^2 = A$, alors f_A est diagonalisable.
2. Montrer que f_A est diagonalisable si et seulement si A l'est.

Exercice 17.

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ avec $n > 0$ et φ l'application définie par $\varphi(P) = (X^2 - 1)P' - (nX + 1)P$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme.
2. Pour $k \in \{0, \dots, n\}$, montrer que $P_k = (1 - X^2)^k$ est une droite vectorielle propre de φ et déduire la valeur propre associée.
3. L'endomorphisme φ est-il diagonalisable?
4. Pour quelles valeurs de n , φ est-il un automorphisme?

Exercice 18.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et f_α un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $A_\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \alpha + 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$

dans une base de $\mathbb{R}^3$.

1. Pour quelles valeurs de α , f_α est un automorphisme?
2. Déterminer le polynôme caractéristique de A_α . En déduire le spectre de A_α .
3. Pour quelles valeurs de α , la matrice A_α est diagonalisable?
4. Déterminer le polynôme minimal de A_α en fonction de α .
5. On suppose pour la suite $\alpha = 0$
 - (a) Déterminer les sous espaces propres et caractéristiques de A_0 .
 - (b) Démontrer que le sous-espace vectoriel $\ker(A + I)^2$ est un plan stable par f_0 .

- (c) Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice T de f_0 est la réduction de Jordan de A_0 .
- (d) Résoudre le système différentiel $X' = A_0X$ avec $X(0) = (1, 1, 1)$.

Exercice 19.

Pour tout couple de réels (x, y) , on définit la matrice $M(x, y)$ par :

$$M(x, y) = \begin{pmatrix} 3x & -2x + 2y & 2x - y \\ -x - y & 4x - 3y & -2x + y \\ -2y & 4x - 4y & -x + y \end{pmatrix}$$

On appelle E , l'ensemble des matrices $M(x, y)$ où x et y décrivent $\mathbb{R}$:

$E = \{M(x, y)/(x, y) \in \mathbb{R}^2\}$. On note $A = M(1, 0)$ et $B = M(0, 1)$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. En déterminer une base et donner sa dimension.
2. Diagonaliser A et déduire que B est aussi diagonalisable.
3. En déduire que pour tout couple de réels (x, y) , $M(x, y)$ est diagonalisable dont on précisera ses valeurs propres.
4. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur (x, y) pour que $M(x, y)$ soit inversible.
5. Montrer que B^2 et A^2 appartiennent à E .

Exercice 20.

1. Montrer que, si f désigne un endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$ diagonalisable, alors l'endomorphisme f^2 est aussi diagonalisable (on rappelle que $f^2 = f \circ f$).

On se propose dans la suite de montrer que la réciproque de cette assertion est fausse. Pour ce faire, on considère l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix}$$

2. Calculer les puissances de A et en déduire les valeurs propres possibles de A .
3. Déterminer une base de $\text{Ker}(g - id_E)$ et une base de $\text{Ker}(g + id_E)$.
4. En déduire que g n'est pas diagonalisable.
5. Résoudre dans E , l'équation $A^2X = -X$.
6. Déterminer une base de $\text{Ker}(g^2 + id_E)$.
7. Déterminer la matrice de g^2 dans une base de E formée de vecteurs de $\text{Ker}(g - id_E)$ et de $\text{Ker}(g^2 + id_E)$ et conclure.

Exercice 21.

Soit E un espace vectoriel de dimension n . Soit f un endomorphisme de E nilpotent d'indice k .

1. Montrez que 0 est la seule valeur propre de f .
2. Soit $x \in E$ tel que $f^{p-1}(x) \neq 0$. Démontrer que les vecteurs $x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x)$ sont linéairement indépendants. En déduire que $p \leq n$.
3. Démontrer que f est nilpotent d'ordre n si et seulement si il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice $A = (a_{ij})$ de f dans $\mathcal{B}$ vérifie $a_{ij} = 0$ si $j \neq i + 1$ et $a_{i,i+1} = 1$.

Exercice 22.

Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, une matrice de projection et φ l'application sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $\varphi(M) = PM + MP$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que l'endomorphisme φ est diagonalisable.

Exercice 23.

Soient $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$ -espace vectorielle, Φ un endomorphisme de $\mathbb{E}$, λ_1 et λ_2 deux scalaires distincts. On suppose que Φ admet $(X - \lambda_1)(X - \lambda_2)$ comme polynôme minimal.

1. Prouver que $\mathbb{E}$ est la somme directe de $\ker(\Phi - \lambda_1 \text{id}_{\mathbb{E}})$ et de $\ker(\Phi - \lambda_2 \text{id}_{\mathbb{E}})$.
Déterminer les projecteurs associés à cette somme directe.
2. Calculer Φ^m pour tout entier naturel m .

Exercice 24.

Soient $E = \mathbb{R}_n[X]$ et deux réels $a \neq b$. Pour $P \in E$, on pose $\varphi(P) = (X - a)(X - b)P' - nXP$.

1. Montrer que $\varphi(P) \in E$ et que φ est un endomorphisme.
2. Déterminer les valeurs propres de φ et en déduire que φ est diagonalisable.

Exercice 25.

On considère, pour $\alpha \in \mathbb{R}$ la matrice :

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 - \alpha & 0 \\ -1 - \alpha & 2 + \alpha & -1 - \alpha & 1 + \alpha \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 1 + \alpha & -1 - \alpha & 1 + \alpha & -\alpha \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de A_α et déduire ses valeurs propres.
2. Pour quelle(s) valeur(s) de α la matrice A_α est-elle diagonalisable ?
3. Diagonaliser A_α .

Exercice 26. Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie n . Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $g^2 = f$.

Dans le cas d'existence de g , donner le nombre exact de g tel que $g^2 = f$.

Application : Soit

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Montrer qu'il existe $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $N^2 = M$. Déterminer une N .

Exercice 27.

Soit $\mathbb{R}_n[X]$, l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n ($n > 1$), muni de sa base canonique $\mathcal{B}$.

Soit φ , l'application qui à P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe $\varphi(P) = (1 - X^2)P'' - 3XP'$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Ecrire la matrice de φ dans $\mathcal{B}$.
3. Déterminer les valeurs propres de φ .
4. En déduire que φ est diagonalisable.
5. Montrer qu'il existe une unique base $\{P_0, \dots, P_n\}$ de vecteurs propres de coefficients dominants égaux à 1 tels que pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, P_k soit de degré k .
6. Déterminer P_0, P_1, P_2, P_3 .
7. Montrer que $k \in \{0, \dots, n\}$, $P_k(-X) = (-1)^k P_k(X)$. En déduire la parité de P_k .
8. Calculer le coefficient de X^{k-2} dans P_k , pour tout $k \geq 2$.

Exercice 28.

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et φ l'application définie par $\varphi(P) = X(X - 1)P' - nXP$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme.
2. L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?
3. Montrer que $\forall k \in \{0, \dots, n\}$, $P_k = X^{-k}(X - 1)^{n+k}$ est une droite vectorielle propre de φ ?

Exercice 29

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $M = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & -1 \\ 2 & \alpha & \beta \\ -3 - \beta & -1 & \alpha \end{pmatrix}$ dans sa base canonique $\mathcal{B}_0$, avec α, β deux réels.

1. (a) A quelle(s) condition(s) sur α, β , f est-il un automorphisme ?
(b) Déterminer les sous-espaces propres de f ? f est-il diagonalisable ?
2. On pose $u = (1, -2 - \beta, 1)$, $v = (0, -2, -1)$ et $w = (1, 1 - \beta, -2)$.
(a) Vérifier que $\mathcal{B} = \{u, v, w\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
(b) Montrer que $(f - (\alpha - 1)Id)^2$ est de rang 1.
(c) Montrer que u et v forment une base de $\text{Ker}(f - (\alpha - 1)Id)^2$.
3. On pose P , la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$.
(a) Déterminer N , la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
(b) Calculer N^n et en déduire M^n , pour tout entier naturel n .
4. On pose $A = M - (\alpha - 1)I_3$
(a) Vérifier que $A^n = 3^{n-2}A^2$, pour tout $n \geq 2$.
(b) Montrer que $M^n = \varphi(n)A^2 + n(\alpha - 1)^{n-1}A + (\alpha - 1)^n I_3$ où φ est une application définie de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.
(c) Calculer $\varphi(n)$ et déduire une expression de M^n en fonction de A^2 , A , I_3 , α et n , pour tout n .

ALGEBRE III

TD2 : Réduction d'endomorphismes et Applications

Exercice 1.

On considère les deux matrices suivantes de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -4 \\ -6 & -2 & 5 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que A et B sont trigonalisables dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ mais qu'elles ne sont pas diagonalisables.
2. Trigonaliser A et B .
3. Donner les polynômes minimaux de A et de B .

Exercice 2. Trigonaliser les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 10 \\ -4 & 3 & 7 \\ -3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Exercice 3.

Soit $A \in \mathcal{M}_6(K)$. On suppose que $P_A(X) = (X - 1)^4(X - 2)^2$ et $m_A(X) = (X - 1)^2(X - 2)$.

1. Que peut-on dire des dimensions des espaces propres ?
2. Quelles sont les formes de Jordan possibles ?

Exercice 4.

1. Pour chacune des matrices ci-dessous, donner une matrice réduite triangulaire en précisant la matrice de passage :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 13 & -5 & -2 \\ -2 & 7 & -8 \\ -5 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

2. Donner la décomposition de Dunford de chacune des matrices A , B et C .
3. Résoudre le système différentiel $\frac{dX}{dt} = AX$.

Exercice 5 : Problème

Soit E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n , où $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On considère u un endomorphisme de E ayant n valeurs propres distinctes $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$.

1. Montrer que l'ensemble $\mathcal{C}(u) = \{v \in \text{End}_{\mathbb{K}} \mid uv = vu\}$ des endomorphismes de E qui commutent avec u est un espace vectoriel.
2. (a) Soit $v \in \mathcal{C}(u)$. Montrer que les sous-espaces propres de u sont v -stables (c'est-à-dire que si E_λ est un sous-espace propre de E associé à la valeur propre λ on a $v(E_\lambda) \subset E_\lambda$).
(b) Donner la dimension des sous-espaces propres de u et montrer que si x est un vecteur propre de u alors x est aussi un vecteur propre de v .
3. Montrer que $\text{Vect}(id_E, u, u^2, \dots, u^{n-1}) \subset \mathcal{C}(u)$.
4. On veut maintenant étudier la liberté de la famille $\{id_E, u, u^2, \dots, u^{n-1}\}$. Pour cela on considère n

réels $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ tels que $\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i u^i = 0$.

(a) Montrer que les (α_i) sont solution du système :

$$(*) \begin{cases} \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_1^2 + \dots + \alpha_{n-1} \lambda_1^{n-1} = 0 \\ \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_2 + \alpha_2 \lambda_2^2 + \dots + \alpha_{n-1} \lambda_2^{n-1} = 0 \\ \vdots \\ \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_n + \alpha_2 \lambda_n^2 + \dots + \alpha_{n-1} \lambda_n^{n-1} = 0 \end{cases}$$

(b) On rappelle que : $\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_i - \lambda_j)$. En déduire l'ensemble des solutions du système (*) et conclure.

5. Application : On prend $E = \mathbb{R}^3$ et on considère les endomorphismes u et v de E dont les matrices dans la base canonique de E sont respectivement :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 3 \\ -3 & 1 & 3 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Montrer que u vérifie l'hypothèse générale de l'énoncé.
- Vérifier que $v \in \mathcal{C}(u)$.
- Diagonaliser u et v dans une base commune.
- Ecrire alors v comme combinaison linéaire de id_E , u , u^2 .

Exercice 6. Réduire les matrices suivantes à la forme de Jordan

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ -1 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7. On considère la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

- Calculer le polynôme caractéristique de A et déterminer ses valeurs propres. A est-elle inversible ? Si oui, calculer son inverse à partir de son polynôme caractéristique.
- Trouver la décomposition spectrale de A .
- Calculer e^A .

Exercice 8. On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 4 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

- Diagonaliser A .
- Trouver les solutions $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ du système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' = x + y - z \\ y' = 2x + 3y - 4z \\ z' = 4x + y - 4z \end{cases}$$

3. Donner la solution avec conditions initiales $(x(0), y(0), z(0)) = (0, 1, -10)$.

Exercice 9. Résoudre le système différentiel :

$$\begin{cases} x' = 2x + 2y + 2z \\ y' = x + 3y + 2z \\ z' = -x - y - z \end{cases}$$

Donner la solution avec conditions initiales $(x(0), y(0), z(0)) = (1, 2, -1)$.

Exercice 10. Résoudre le système différentiel :

$$\begin{cases} x' = x + 4y - 4z + te^{2t} \\ y' = -2x + 8y - 6z \\ z' = -x + 3y - z - 2te^{2t} \end{cases}$$

Donner la solution avec conditions initiales $(x(0), y(0), z(0)) = (1, 2, -1)$.

Exercice 11. On considère $(x_n)_n$, $(y_n)_n$ et $(z_n)_n$ trois suites de nombres réels satisfaisant aux relations de récurrence suivantes :

$$\begin{cases} x_{n+1} = -x_n + y_n + z_n \\ y_{n+1} = x_n - y_n + z_n \\ z_{n+1} = x_n + y_n - z_n \end{cases}$$

Calculer x_n , y_n et z_n en fonction de x_0 , y_0 et z_0 .

Exercice 12.

Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B}$ une base de E . Soit u l'endomorphisme de E de matrice dans la base $\mathcal{B}$:

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Montrer que le polynôme caractéristique de A est $P_A = (2 - X)(X - 4)^2$.
(b) Déterminer le polynôme minimal m_A de A ?
(c) La matrice A est-elle diagonalisable ? trigonalisable ? Justifier.
- (a) Calculer les projecteurs p_1 et p_2 associés respectivement aux valeurs propres 2 et 4 de A en fonction de u .
(b) En déduire la décomposition de Dunford de la matrice A .
(c) Trouver une matrice P inversible telle que $B = P^{-1}AP$ soit une forme de Jordan de A .
- Pour tout réel t , déterminer e^{tA} .
- Résoudre le système différentiel suivant : $X'(t) = AX(t)$ avec $X(0) = {}^t(0, 0, 1)$.

Exercice 13.

Soit A la matrice suivante et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé à A .

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Montrer que le polynôme caractéristique de A est $(2 - X)(1 - X)^2$, déterminer son polynôme minimal et conclure.
- Ecrire la décomposition spectrale associée à A et déduire la décomposition de $A = D + N$, où D est une matrice diagonalisable et N nilpotente telle que $DN = ND$, en fonction des projecteurs P_i et des nilpotents N_i .

3. Ecrire les relations entre A , P_i et N_i et en déduire P_i et N_i en fonction de A .
4. Déterminer D et N .
5. Calculer les projecteurs spectraux P_i en utilisant le théorème de Bezout.
6. Déterminer une formule de récurrence pour calculer A^n en fonction des P_i , N_i et n , pour tout $n \in \mathbb{N}$.
7. En déduire A^n en fonction de A^2 , A , I_3 et n .
8. On considère le système

$$\begin{cases} x_0 = 1, y_0 = 2, z_0 = -1 \\ x_{n+1} = 2x_n - y_n + z_n \\ y_{n+1} = y_n + z_n \\ z_{n+1} = -x_n + y_n + z_n \end{cases}$$

Déterminer x_n , y_n et z_n en fonction de n .

Exercice 14.

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont le polynôme minimal est $m_A = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)^2$ où $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ et $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

1. La matrice A est-elle diagonalisable ? trigonalisable ? justifier.
2. Ecrire la décomposition spectrale associée à A et déduire la décomposition de $A = D + N$, où D est une matrice diagonalisable et N nilpotente telle que $DN = ND$, en fonction des projecteurs P_i et des nilpotents N_i , pour $i = 1, 2$.
3. Ecrire les relations entre A , P_i et N_i et en déduire P_i et N_i en fonction de A et I_3 .
4. Déterminer D et N en fonction de A et I_3 .
5. Calculer les projecteurs spectraux P_i et déduire les nilpotents N_i en utilisant le théorème de Bezout.
6. Déterminer A^n en fonction des P_i , N_i et n , pour tout $n \in \mathbb{N}$.
7. En déduire A^n en fonction de A^2 , A , I_3 et n .
8. Ecrire e^A sous forme polynômiale en A .

Exercice 15.

Soit M la matrice suivante et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé à M .

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que M n'est pas diagonalisable mais trigonalisable.
2. Déterminer la décomposition spectrale de M .
3. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est la forme de Jordan de M .
4. Résoudre le système différentiel suivant : $X'(t) = MX(t)$ avec $X(0) = {}^t(x_0, y_0, z_0)$.

Exercice 16.

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme sur E vérifiant $u^3 + u = 0$

1. Montrer que $\text{Im}(u)$ est stable par u .
2. Pour tout $x \in \text{Im}(u)$, calculer $u^2(x)$.
3. Soit v l'endomorphisme induit par u sur $\text{Im}(u)$. Montrer que v est un isomorphisme.
4. En déduire que le rang de u est pair.

ALGEBRE III

TD3 : DUALITE

Exercice 1

1. Calculer la base de $(\mathbb{R}^3)^*$ duale de la base (v_1, v_2, v_3) de $\mathbb{R}^3$, où $v_1 = (0, 1, 1)$, $v_2 = (1, 1, -1)$ et $v_3 = (-2, -1, 1)$.
2. Déterminer l'orthogonal dans $\mathbb{R}^3$ du singleton $\{(x, y, z) \mapsto 2x - y - z\}$ de $(\mathbb{R}^3)^*$? Le caractériser avec une équation, puis sans.
3. Calculer l'orthogonal dans $(\mathbb{R}^3)^*$ du plan de $(\mathbb{R}^3)$ passant par $(1, 0, 0)$ et $(0, 1, 1)$, en déduire une équation de ce plan.
4. Soit $E = \mathbb{R}^4$. Calculer l'orthogonal $A^\perp$ dans E^* de la partie $\{(1, 1, 0, -1), (0, 1, -1, 0)\}$ de E . Calculer l'orthogonal $A^{\perp^\circ}$ de $A^\perp$ dans E et donner un système d'équations pour ce dernier sous-espace.

Exercice 2

1. Montrer que les trois formes linéaires sur $\mathbb{R}^3$: $\varphi_1(x) = x_1 + 2x_2 + x_3$, $\varphi_2(x) = 2x_1 + 3x_2 + 3x_3$, $\varphi_3(x) = 3x_1 + 7x_2 + x_3$ forment une base de $(\mathbb{R}^3)^*$.
En déduire l'orthogonal de $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$.
2. Déterminer la base préduale de $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$.

Exercice 3

Soient $E = \mathbb{R}^n$ et $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ avec $\alpha \neq 0_{\mathbb{R}^n}$. On pose

$$f_\alpha(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \text{ avec } x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

1. Montrer que f_α est une forme linéaire. Quel est son noyau? Donner sa dimension et une base. Quelle est son image?
2. Soit maintenant φ une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$, non identiquement nulle. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}^n$, non nul, tel que $\varphi = f_\alpha$.

Exercice 4. Soient E et F deux K -espaces vectoriels de dimension finies et f un morphisme de E dans F .

1. Soit x un vecteur non nul de E . Montrer qu'il existe des formes linéaires non nulles sur x .
2. Montrer que $\text{Im}({}^t f) = \text{Ker}(f)^\perp$ et $\text{Ker}({}^t f) = \text{Im}(f)^\perp$.
3. En déduire que f est injective si et seulement si ${}^t f$ est surjective et que f est surjective si et seulement si ${}^t f$ est injective.

Exercice 5. Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie, soit H un hyperplan de E , φ une forme linéaire sur E telle que $H = \text{Ker}\varphi$.

1. Soit $u \in E \setminus H$. Montrer que $E = Ku \oplus H$.
2. Soit p le projecteur sur H parallèlement à Ku .
On pose $\forall x \in E, f(x) = p(x) + \varphi(x)u$.

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit un projecteur de E .

Exercice 6. Soient E, F deux K -espaces vectoriels et $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. On définit une application (dite *transposée* de f) : ${}^t f : F^* \rightarrow E^*$

en posant pour tout $\varphi \in F^* : {}^t f(\varphi) = \varphi \circ f$.

1. Montrer que ${}^t f$ applique bien F^* dans E^* .
2. Montrer que ${}^t f$ est une application linéaire.

3. Vérifier les relations suivantes :

(a) ${}^t(f + g) = {}^t f + {}^t g$.

(b) ${}^t(\lambda f) = \lambda {}^t(f)$.

(c) ${}^t(f \circ g) = {}^t g \circ {}^t f$.

(d) ${}^t(Id_E) = Id_{E^*}$.

(e) ${}^t({}^t f) = f$.

(f) Si f est bijective, ${}^t f$ est aussi bijective et on a : ${}^t(f^{-1}) = ({}^t f)^{-1}$.

4. On suppose que E et F sont de dimensions finies et soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ des bases de E et F respectivement et $\mathcal{B}^*$, $\mathcal{B}'^*$ leurs bases duales. On note $A = M(f)_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$.

Montrer que : $M({}^t f)_{\mathcal{B}'^*, \mathcal{B}^*} = {}^t(A)$

5. En déduire les relations sur les matrices : ${}^t(AB) = ({}^t B)({}^t A)$, ${}^t(A^{-1}) = ({}^t A)^{-1}$

6. Si E est dimension et si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E , donner la relation qui existe entre la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et la matrice de passage Q de $\mathcal{B}^*$ à $\mathcal{B}'^*$.

Exercice 7. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n .

1. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}_1$ deux bases de E et P , la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}_1$.

On note $\mathcal{B}^*$ et $\mathcal{B}_1^*$ les bases duales de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}_1$ et Q la matrice de passage de $\mathcal{B}^*$ à $\mathcal{B}_1^*$.

Y a-t-il quel lien entre P et Q .

2. On suppose $E = \mathbb{R}^3$ et on note $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de E .

On considère les formes φ_1 , φ_2 et φ_3 définies par : $\varphi_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 - x_2 + x_3$,

$\varphi_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 - 2x_3$ et $\varphi_3(x_1, x_2, x_3) = -4x_1 + x_2 + x_3$.

(a) Vérifier que $D^* = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est une base de $(\mathbb{R}^3)^*$. Quelle est l'orthogonal de D^* ?

(b) Déterminer les coordonnées des vecteurs de la base préduale de D^* dans $\mathbb{R}^3$.

(c) Exprimer dans la base D^* la forme linéaire exprimée dans $\mathcal{B}^*$ par $f(x, y, z) = x + y + z$.

3. On considère $E = \mathbb{R}^4$ et on note $\mathcal{B}' = \{e'_1, e'_2, e'_3, e'_4\}$ sa base canonique.

(a) On donne les vecteurs $u_1 = (1, 1, 1, 0)$, $u_2 = (1, 0, 1, 0)$ et $u_3 = (1, 1, 0, 0)$. Déterminer $\{u_1, u_2, u_3\}^\perp$.

(b) On considère les formes $\varphi'_1 = 2e_1'^* + e_2'^* + e_3'^*$ et $\varphi'_2 = -e_1'^* + 2e_3'^*$. Déterminer $\{\varphi'_1, \varphi'_2\}^0$.

4. Soient f et g deux formes linéaires non nulles sur E .

Montrer que $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(g)$ si et seulement si f et g sont proportionnelles.

5. Soient F_1 et F_2 deux s.e.v de E . Montrer que $(F_1 + F_2)^\perp = F_1^\perp \cap F_2^\perp$.

6. Soit A une partie de E et B une partie de E^* .

Montrer que $A^\perp = (\text{vect}(A))^\perp$ et $B^0 = \bigcap_{f \in B} \text{Ker}(f)$.

7. Soient $f_1, f_2, \dots, f_k$ et f des formes linéaires sur E .

Démontrer que $f \in \text{vect}(f_1, \dots, f_k)$ si et seulement si $\bigcap_{i=1}^k \text{Ker}(f_i) \subset \text{Ker}(f)$.

Exercice 8.

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie et F un s.e.v de E .

1. On considère les formes linéaires sur $E = \mathbb{R}^3$ définies par : $\varphi_1(x, y, z) = 2x + y - z$,
 $\varphi_2(x, y, z) = -x + 3y + 4z$ et $\varphi_3(x, y, z) = 5x - 3y + 2z$ dans la base canonique $\mathcal{B}_0$.

(a) Vérifier que $\mathcal{B}^* = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est une base de $(\mathbb{R}^3)^*$.

(b) Déterminer l'orthogonal de $\mathcal{B}_1^* = (\varphi_1, \varphi_2)$.

(c) Déterminer les coordonnées des vecteurs de la base préduale de $\mathcal{B}^*$.

(d) Exprimer dans la base $\mathcal{B}^*$ la forme linéaire exprimée dans $\mathcal{B}_0^*$ par $f(x, y, z) = 2x + 3y + 4z$.

2. Montrer que $\dim(F) + \dim(F^\perp) = \dim(E)$ et $(F^\perp)^0 = F$.

3. Montrer que F est un hyperplan de E si et seulement si il existe une forme linéaire non nulle sur E dont F est son noyau.