

Exercice 1

Soient $f : [a, b] \longrightarrow F$ (un espace de Banach) une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, avec $a < b$.
On considère la fonction p définie par

$$p(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

1. Montrer que pour tout $x \in [a, b]$,

$$\int_a^b (f(x) - p(x))dx = \int_a^b f(x)dx - (b - a)\frac{f(b) + f(a)}{2}$$

2. Appliquer la formule de Taylor avec le reste intégral à $f - p$ au point $c = \frac{b - a}{2}$

3. On pose $r(x) = \int_0^1 (1 - y)f''(c + y(x - c))(x - c)^2 dy$. Justifier que $f(c) - p(c) = -\frac{r(a) + r(b)}{2}$

4. Montrer que

$$\int_a^b (f(x) - p(x))dx = \int_a^b r(x)dx - (b - a)\frac{r(a) + r(b)}{2}.$$

5. Dédurre que

$$\left| \int_a^b f(x)dx - (b - a)\frac{f(b) + f(a)}{2} \right| \leq C \max_{\eta \in [a, b]} \|f''(\eta)\| (b - a)^3$$

Exercice 2

En utilisant la différentielle d'une application appropriée que l'on définira, montrer que le système d'équations:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \sin(x + y) \\ y = \frac{1}{2} \cos(x - y) \end{cases}$$

admet une solution unique dans le plan muni de la norme euclidienne.

Exercice 3

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $f(x, y) = (xe^y, xe^{-y})$.

1. Montrer que pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\alpha \neq 0$; il existe un voisinage U de (α, β) dans lequel l'équation $f(x, y) = (u, v)$ admet une solution unique quelque soit $(u, v) \in f(U)$.
2. Soit ϕ l'inverse locale de f .
Déterminer la matrice jacobienne de ϕ en (u, v) .

Exercice 4

On considère le système d'équations, d'inconnues $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 + z^3 + t^2 = 0 \\ x^2 = y^2 + z^2 + t = 2 \\ x + y + z + t = 0. \end{cases}$$

1. Vérifier que le point $(0, -1, 1, 0)$ est solution.
2. Montrer que l'on peut résoudre ce système par rapport à (x, y, z) au voisinage de ce point.
3. Calculer la dérivée en 0 de l'application $t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$ ainsi définie.

Exercice 5

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par: $f(x, y, z) = z^4 - 2yz^2 + y^2 + x^2 - 1$.

1. (a) Montrer qu'il existe un voisinage U de $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ et une application $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $\varphi(0, 0) = 1$ et $f(x, y, \varphi(x, y)) = 0, \forall (x, y) \in U$.
 (b) Expliciter φ et le plus grand U possible.
 (c) Calculer $\varphi'(0, 0)$.
2. On considère l'application $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par: $f(x, y, z, t) = (x^2 + y^2 - t^2; xy - z)$
 Rédiger et résoudre un problème analogue à celui du 1).

Exercice 6

Soient $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto g(t) = (t-1)^2(t+1)$ et $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 + xy - xz$

1. Montrer que g' s'annule seulement en $t = 1$.
2. Montrer que ϕ est à valeurs positives, et s'annule seulement en $(0, 0, 0)$.
3. Soit $f = g \circ \phi$. Montrer que $a \in \mathbb{R}^3$ est un point critique de f si et seulement si $a = (0, 0, 0)$ où $\phi(a) = 1$.
4. Déterminer la matrice hessienne de f en $(0, 0, 0)$ En déduire la nature de ce point critique.
5. Montrer que f est à valeurs positives. En déduire que tout point critique non nul de f est un minimum global de f .

Exercice 7

Soient E et F deux espaces de Banach, U un ouvert de E contenant l'origine 0. Soient $A : U \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ et $B : U \rightarrow F$ définie par

$$B(x) = A(x)(x) \quad \forall x \in U.$$

montrer que si $A(0) \in \text{Isom}(E, F)$, alors B est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ d'un voisinage de 0 dans E sur un voisinage de 0 dans F .