

TD 2 de Topologie**Exercice 1**

Soit X un espace métrique.

1. Soit A et B deux compacts disjoints dans X . Montrer qu'ils possèdent des voisinages ouverts disjoints (commencer par le cas où B est réduit à un point).
2. Soit K un compact non vide de X et U un ouvert de X contenant K . Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que pour tout $x \in X$, on ait l'implication :

$$d(x, K) < r \Rightarrow x \in U .$$

Exercice 2

Montrer qu'une suite convergente et sa limite forment un ensemble compact.

Exercice 3

Soient $K, F \subset \mathbb{R}^n$ des parties non vides, K compact et F fermé. Montrer qu'il existe $a \in K$ et $b \in F$ tel que $\|a - b\| = \text{dist}(K, F)$.

Exercice 4

Soit E un espace compact et soit (F, d) un espace métrique. Soit $f : E \rightarrow F$ une application localement bornée, ce qui signifie que, pour tout $y \in E$, il existe un voisinage V_y de y sur lequel f est bornée. Montrer que f est bornée sur E .

Exercice 5.

Soit X un espace topologique et $f : X \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer que l'application $g : x \in X \rightarrow \int_0^1 f(x, y) dy$ est continue.

Exercice 6.

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow$

$\mathbb{R}^n$ une application continue. Elle est dite *propre* si pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^n$, l'image réciproque $f^{-1}(K)$ est compact.

1. Montrer que, si f est propre, alors l'image par f de tout fermé de $\mathbb{R}^n$ est un fermé.
2. Établir l'équivalence suivante : l'application f est propre si et seulement si elle a la propriété :

$$\|f(x)\| \rightarrow \infty \quad \text{quand} \quad \|x\| \rightarrow \infty .$$

Exercice 7

Soit (X, d) un espace métrique, soit (Y, δ) un espace métrique compact et soit $f : X \rightarrow Y$ une application dont le graphe

$$G = \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subset X \times Y$$

est fermé dans $X \times Y$. Notons $p : G \rightarrow X$ et $q : G \rightarrow Y$ les restrictions des deux projections $p(x, y) = x$ et $q(x, y) = y$. Montrer que p est un homéomorphisme de G sur X . En déduire que f est continue.

Exercice 8

Soient (E, d) un espace métrique compact et $f : E \rightarrow E$ une application vérifiant

$$d(f(x), f(y)) \geq d(x, y) \quad \text{pour tout } x, y \in E .$$

On se propose de montrer que f est une isométrie surjective. Soient $a, b \in E$ et posons, pour $n \geq 1$, $a_n = f^n(a) = f \circ f^{n-1}(a)$ et $b_n = f^n(b)$.

1. Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $k \geq 1$ tel que $d(a, a_k) < \epsilon$ et $d(b, b_k) < \epsilon$ (Considérer une valeur d'adhérence de la suite $z_n = (a_n, b_n)$).
2. En déduire que $f(E)$ est dense dans E et que $d(f(a), f(b)) = d(a, b)$ (Considérer la suite $u_n = d(a_n, b_n)$).