

TD5. Extensions de Corps**Exercice 1.**

Déterminer le degré des extensions suivantes puis donner leur bases :

- (1) $\mathbb{Q}[\sqrt{2}], \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$ sur $\mathbb{Q}$.
- (2) $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}, \sqrt{2}]$ sur $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$, sur $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, sur $\mathbb{Q}$.
- (3) $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$ sur $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$, sur $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, sur $\mathbb{Q}$. Comparer $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$ à $\mathbb{Q}[\sqrt{2} + \sqrt{3}]$. Donner le polynôme minimal de $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ sur $\mathbb{Q}$.
- (4) $\mathbb{Q}[j]$ sur $\mathbb{Q}$. A t-on $\sqrt{3}, i, j \in \mathbb{Q}[j]$?

Exercice 2.

Les questions sont indépendantes.

- (1) Justifier brièvement pourquoi $\mathbb{Q}[X]/(\frac{2}{3}X^3 + \frac{1}{2}X - \frac{1}{6})$ est un corps. Montrer que la classe $\bar{X}$ dans cet anneau-quotient est inversible et donner son inverse $\bar{X}^{-1}$.
- (2) Donner une extension de degré infini de $\mathbb{R}$.
- (3) Montrer que $\mathbb{C}$ est une extension quadratique de $\mathbb{R}$. Montrer que $\mathbb{C}$ est une extension algébrique de $\mathbb{R}$. Donner une extension quadratique de $\mathbb{Q}$.
- (4) Quelle nuance y a t-il entre $K[a]$ et $K(a)$? Montrer que si a est algébrique sur L alors $K[a] = K(a)$.
- (5) Soient L une extension de K et $A, B \subset L$. Montrer que $K(A \cup B) = K(A)(B)$.
- (6) Donner le polynôme minimal de $\sqrt[6]{2}$ sur $\mathbb{Q}$ et sur $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.
- (7) Donner un corps de rupture de $X^2 - 2$ sur $\mathbb{Q}$.

Exercice 3.

- (1) Calculer les racines dans $\mathbb{C}$ de $X^2 + 3X + 1$.
- (2) Soit α une racine dans $\mathbb{C}$ de $X^6 + 3X^3 + 1$. Montrer que $\sqrt{5} \in \mathbb{Q}(\alpha)$. En déduire que 2 divise $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$.
- (3) Montrer que $\beta = \alpha + 1/\alpha$ est une racine de $X^3 - 3X + 3$. En déduire que 3 divise $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$.
- (4) Calculer $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$ et en déduire que $X^6 + 3X^3 + 1$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$.
- (5) Déterminer le corps L des racines de $X^6 + 3X^3 + 1$.
- (6) Calculer $[L : \mathbb{Q}]$.

Exercice 4.

Soient $P(X) = X^3 + X + 1 \in \mathbb{Z}_5[X]$, $K = \mathbb{Z}_5[X]/(P(X))$ et $x = \bar{X}$ l'image de X par le morphisme canonique $\pi : \mathbb{Z}_5[X] \rightarrow K$.

- (1) Montrer que K est un corps. Donner sa caractéristique et son cardinal.

- (2) Ecrire x^3, x^{15}, x^{30} dans la $\mathbb{Z}_5$ -base $\mathcal{B} = \langle 1, x, x^2 \rangle$. En déduire l'ordre de x et de $2x$ dans le groupe $(K^*, \times)$.

Exercice 5.

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

- (1) Déterminer $[\mathbb{Q}(5 + \sqrt[3]{25}) : \mathbb{Q}]$.
- (2) Soient p et q deux nombres premiers.
 - (a) Montrer que $\sqrt{p}$ et $\sqrt{q}$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$.
 - (b) Déterminer $[\mathbb{Q}(\sqrt{p} + \sqrt{q}) : \mathbb{Q}]$.
- (3) Soient K un corps, $P(X) \in K[X]$ un polynôme irréductible de degré $n \geq 2$ et L une extension de K de degré m avec $n \wedge m = 1$. Montrer que $P(X)$ est encore irréductible sur $L[X]$.