

TD4. Anneaux et Polynômes.**Exercice 1.**

Soient A un anneau commutatif et I un idéal de A .

- (1) Montrer que $\sqrt{I} = \{x \in A \mid \exists n \geq 1, x^n \in I\}$ est un idéal de A .
- (2) Un idéal I d'un anneau commutatif A est dit *primaire* si et seulement si

$$\forall (x, y) \in A^2, xy \in I \text{ et } x \notin I \implies y \in \sqrt{I}.$$

- (a) Montrer que I est primaire si et seulement si les diviseurs de zéros de A/I sont nilpotents.
- (b) Montrer que si I est un idéal premier alors I est primaire.
- (c) Montrer que si I est un idéal primaire alors $\sqrt{I}$ est premier.

Exercice 2.

On considère l'anneau $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ et on définit la *norme* N par $N(z) = z\bar{z}$.

- (1) Montrer que $N(zz') = N(z)N(z')$.
- (2) Montrer que $N(z) = 1 \Leftrightarrow z \in \mathbb{Z}[i\sqrt{5}]^\times$.
- (3) Montrer que $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ n'est pas factoriel.
- (4) Montrer que $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}] \cong \mathbb{Z}[X]/(X^2 + 5)$.
- (5) Déterminer $\text{Frac}(\mathbb{Z}[i\sqrt{5}])$.

Exercice 3.

Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha = \sqrt{m^2 + 1}$. On pose

$$\mathbb{Z}[\alpha] = \{x + \alpha y \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$$

et $\omega = m + \alpha$. Pour $a = x + \alpha y \in \mathbb{Z}[\alpha]$ on pose $N(a) = x^2 - \alpha^2 y^2$.

- (1) Montrer que $\mathbb{Z}[\alpha]$ est un sous-anneau de $\mathbb{R}$.
- (2) Montrer que pour tous $a, b \in \mathbb{Z}[\alpha]$ on a $N(ab) = N(a)N(b)$.
- (3) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que $a \in \mathbb{Z}[\alpha]^\times$ l'ensemble des inversibles de $\mathbb{Z}[\alpha]$.
- (4) Soit $a = x + \alpha y \in \mathbb{Z}[\alpha]^\times$ avec $x, y \in \mathbb{Z}$ et $a > 1$.
 - (a) Montrer que $y \neq 0$ et que $|x| \geq m$.
 - (b) Montrer que $x, y \in \mathbb{N}^*$ et que $a \geq \omega$.
 - (c) Montrer que $\mathbb{Z}[\alpha]^\times = \{\pm \omega^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice 4.

- (1) Simplifier $A[X]/(X - a)$, $a \in A$ où A est un anneau ;
 $\mathbb{Z}[X]/(2X - 1)$; $\mathbb{R}[X]/(X^2 + 1)$; $\mathbb{Z}[X]/(X^2 + 1)$; $\mathbb{Z}[X]/(X^2 + X + 1)$.
- (2) Déterminer $\mathbb{Z}[i]/(7 + i)$.

Exercice 5.

Soit p un nombre premier.

- (1) Définir un morphisme *naturel* $\pi: \mathbb{Z}[X] \rightarrow \mathbb{Z}_p[X]$. Montrer que π ainsi défini est surjectif.
- (2) Soit $P(X)$ un polynôme unitaire de $\mathbb{Z}[X]$. Montrer que si $\pi(P(X))$ est irréductible dans $\mathbb{Z}_p[X]$ alors $P(X)$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.
- (3) Le polynôme $X^4 + 2X^3 + X + 1$ est-il irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$?

Exercice 6.

- (1) Décomposer $P(X) = 6X^n - 6X^{n-1} + 24X^2 - 12X - 12$ avec $n \geq 3$ en facteurs irréductibles dans $\mathbb{Z}[X]$.
- (2) Montrer que $X^4 - 10X^3 + 21X^2 - 10X + 11$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.
- (3) Factoriser $X^5 + X + 1$ dans $\mathbb{Z}[X]$.
- (4) Factoriser $X^4 - X^2 + 1$ dans $\mathbb{Z}_{11}[X]$ en éléments irréductibles.
- (5) Décomposer $X^4 + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{Z}[X]$, $\mathbb{Z}_2[X]$, $\mathbb{Z}_3[X]$.

Exercice 7.

On considère le polynôme $P = X^4 - 10X^2 + 1 \in \mathbb{Q}[X]$.

- (1) Déterminer les racines réelles de P .
- (2) Montrer que P est irréductible dans $\mathbb{Q}$.
- (3) Soit α une racine de P . Montrer que $\mathbb{Q}[\alpha] = \{a\alpha^3 + b\alpha^2 + c\alpha + d \mid a, b, c, d \in \mathbb{Q}\}$.
- (4) Montrer que l'anneau-quotient $\mathbb{Q}[X]/(P)$ est isomorphe à l'anneau $\mathbb{Q}[\alpha]$.
- (5) En déduire que $\mathbb{Q}[\alpha]$ est un corps.