

TD3. p -Groupes et Théorèmes de Sylow

Exercice 1.

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

- (1) Soit p un nombre premier et n un entier naturel avec $p > n$. On considère G un groupe d'ordre pn , et H un sous-groupe de G d'ordre p . Démontrer que H est un sous-groupe normal de G .
- (2) Démontrer qu'un groupe d'ordre 200 n'est pas simple.

Exercice 2.

- (1) Soit G un groupe avec $|G| = 2005$.
 - (a) Combien peut-il y avoir de 5-Sylow de G ? de 401-Sylow de G ?
 - (b) On suppose qu'il existe un unique 5-Sylow noté H_5 et un unique 401-Sylow noté H_{401} .
 - (i) Montrer que ces deux sous-groupes sont cycliques.
 - (ii) En notant x un générateur de H_5 et y un générateur de H_{401} , montrer qu'il existe $i \in \mathbb{Z}$ tel que $xyx^{-1} = x^i$. Montrer que $x \mapsto yxy^{-1}$ permet de définir un automorphisme ϕ sur H_5 . En déduire que 5 ne divise pas i .
 - (iii) Montrer que $\phi^{401} = \text{Id}$. Montrer que $i^{400} \equiv 1[5]$ puis que $i^{401} \equiv i[5]$ puis que $\phi = \text{Id}$.
 - (iv) En déduire que $G \cong \mathbb{Z}_{2005}$.

Exercice 3.

- (1) Démontrer qu'il n'y a pas de groupe simple ayant 30, 42, 105 éléments.
- (2) Généraliser aux groupes pqr où p, q, r sont distincts et premiers avec $p > q > r$.

Exercice 4.

On suppose qu'il existe un groupe simple G d'ordre 180.

- (1) Montrer que si $n_5 = 6$ alors il existe un morphisme non-trivial et injectif $\phi: G \rightarrow S_6$.
- (2) En utilisant la signature $\epsilon: S_6 \rightarrow \{-1, 1\}$, montrer que G s'identifie à un sous-groupe de A_6 .
- (3) En utilisant le fait que A_6 est un groupe simple, déduire que $n_5 = 36$.
- (4) Montrer que G contient dix 3-Sylow.
- (5) Soient S, T deux 3-Sylow distincts contenant un même élément $g \neq e$. Déterminer le cardinal du centralisateur $C_G(g) = \{x \in G \mid gx = xg\}$ de g en utilisant l'action de G sur $G/C_G(g)$.
- (6) Montrer qu'un groupe d'ordre 18 admet un unique 3-Sylow. Conclusion ?
- (7) Déduire des questions précédentes qu'il n'existe pas de groupe simple d'ordre 180.

Exercice 5.

- (1) Soit G un groupe d'ordre fini n et soit $n = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_k^{m_k}$ la décomposition de n en produit de facteurs premier. On suppose que G admet un unique p_i -sous-groupe de Sylow G_{p_i} pour chaque $i = 1, 2, \dots, k$.
- (a) Montrer que si $x \in G_{p_i}$ et $y \in G_{p_j}$ avec $p_i \neq p_j$ alors $xy = yx$.
- (b) En déduire que l'application
- $$\varphi: G_{p_1} \times G_{p_2} \times \cdots \times G_{p_k} \rightarrow G, \quad (x_1, x_2, \dots, x_k) \mapsto x_1 x_2 \cdots x_k$$
- est un homomorphisme.
- (c) Montrer que φ est un isomorphisme.
- (2) On suppose maintenant que l'ordre de G est $n = 255$.
- (a) Montrer que G possède un unique sous-groupe distingué H d'ordre 17.
- (b) Montrer que G/H est abélien et possède un unique sous-groupe K d'ordre 5.
- (c) Soit $\pi: G \rightarrow G/H$ la projection canonique. Prouver que $\pi^{-1}(K)$ est un sous-groupe distingué de G .
- (d) Montrer que $\pi^{-1}(K)$ est cyclique.