

TD2. Action de Groupes**Exercice 1.**

Montrer que les opérations suivantes sont des actions de groupes :

- (1) $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \times \mathbb{C}^n - \{0_{\mathbb{C}^n}\} \longrightarrow \mathbb{C}^n - \{0_{\mathbb{C}^n}\}, (A, x) \longmapsto A \cdot x = Ax$. Déterminer le stabilisateur de $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$.

- (2) Pour $E = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im} z > 0\}$ et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \times E \longrightarrow E, (A, z) \longmapsto A \cdot z = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Déterminer le stabilisateur de $z = i$.

Exercice 2.

On note A_5 le groupe des permutations paires de 5 éléments. Soient α et β les permutations suivantes :

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

- Montrer que $G = \langle \alpha, \beta \rangle$ est un sous-groupe de A_5 d'ordre au moins 30.
- Calculer $\beta\alpha\beta^{-1}$ et $\alpha\beta\alpha^{-1}$.
- Déterminer l'orbite de 1 pour l'action de G sur l'ensemble $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. En déduire l'indice du stabilisateur de 1.
- Montrer que le stabilisateur de 1 pour l'action de G contient un élément d'ordre 2 noté θ et un élément d'ordre 3 noté λ . Calculer $\theta\lambda\theta^{-1}$ et $\lambda\theta\lambda^{-1}$.
- En déduire que le cardinal du stabilisateur de 1 est strictement supérieur à 6 puis, que $G = A_5$.

Exercice 3.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et p un nombre premier. On rappelle que $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ désigne le groupe des matrices carrées de taille n , inversibles et à coefficients dans le corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. On note u_n le cardinal de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ et $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ la base canonique de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$.

- Définir l'action naturelle du groupe $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ sur $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$?
- Déterminer le cardinal de l'orbite de e_1 pour cette action.
- Déterminer en fonction de u_{n-1} le cardinal du stabilisateur de e_1 .
- Que vaut u_1 ? Déterminer u_n en fonction de p .

Exercice 4.

- Si $\sigma \in S_n$ on pose $P_\sigma = (p_{ij})$ avec $p_{ij} = \delta_{i\sigma(j)}$. Vérifier que l'ensemble $\mathcal{P}$ des matrices de cette forme (i.e. matrices de permutations) est un groupe isomorphe à S_n .
- Montrer que $\mathcal{P}$ agit sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par translation à gauche. Comment caractériser cette action ? Que dire des matrices qui sont dans la même orbite ?

- (3) Comment décrire la multiplication à droite par une matrice de permutation ?

Exercice 5.

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

- (1) Montrer que l'application $S_n \times \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n] \longrightarrow \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ définie par

$$(\sigma, P(X_1, \dots, X_n)) \longmapsto (P(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)}))$$

est une action de groupe.

Déterminer l'orbite du polynôme $\prod_{1 \leq i < j \leq n} (X_i - X_j)$

- (2) Soit G un groupe et $\gamma: G \rightarrow \text{Aut}(G)$ le morphisme défini par $\gamma(g)(x) = gxg^{-1}$ pour tout $g, x \in G$.
- (a) Déterminer $\ker \gamma$.
 - (b) On note $\text{Int}(G) = \text{im}(\gamma)$. Montrer que $\text{Int}(G) \triangleleft \text{Aut}(G)$.
 - (c) Calculer $\text{Aut}(S_3)$ et $\text{Int}(S_3)$.