

Exercice 1

Soient a, b deux réels strictement positifs. On pose pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$N(x, y) = \sqrt{a^2 x^2 + b^2 y^2}$$

1. Prouver que N est une norme.
2. Dessiner la boule de centre $(0, 0)$ et de rayon 1.
3. Déterminer le plus petit réel $p > 0$ tel que $N(x, y) \leq p\sqrt{x^2 + y^2} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ et le plus petit réel $q > 0$ tel que $\sqrt{x^2 + y^2} \leq qN(x, y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 2

Soit E l'espace vectoriel des fonction de classe $\mathbb{C}^1$ définies sur le segment $[0, 1]$. On pose pour $f \in E$,

$$N_1(f) = \int_0^1 |f(x)| dx, \quad N_2(f) = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|, \quad N_3(f) = \sup_{x \in [0, 1]} |f'(x)| + |f(0)|$$

1. Montrer que N_1, N_2 et N_3 sont des normes sur E .
2. Montrer que pour tout $f \in E$,

$$N_1(f) \leq N_2(f) \leq N_3(f).$$

3. (a) On pose pour $f \in E$, $v(f) = f(1)$.
Montrer que l'application v est continue de (E, N_3) dans $\mathbb{R}$.
- (b) Soit $T : E \longrightarrow E$ définie pour tout $f \in E$ par:

$$T(f)(x) = \int_0^x f(t) dt, \quad \forall x \in [0, 1]$$

Montrer que T est continue de (E, N_3) dans (E, N_3)

Exercice 3

Soit E une application linéaire de E vers F et surjective (i. e $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et surjective)
Montrer que pour que f soit un isomorphisme il faut et il suffit qu'il existe deux constantes strictement positives m et M telles que, pour tout $x \in E$,

$$m\|x\|_E \leq \|f(x)\|_F \leq M\|x\|_E$$

Exercice 4

1. Soit E un espace vectoriel sur lequel toutes les normes sont équivalentes. Montrer que toute forme linéaire est continue sur E .
2. Montrer que sur un espace vectoriel normé de dimension infinie, il existe des formes linéaires non continues. Conclure que toutes les normes sur un espace vectoriel normé sont équivalentes si et seulement si il est de dimension finie.
3. Soit $E = \mathcal{C}([0, 1])$ l'ensemble de toutes les fonctions continues sur le segment $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Montrer que les normes $\|f\|_\infty = \sup_{0 \leq t \leq 1} |f(t)|$ et $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$ définies sur E ne sont pas équivalentes.

Exercice 5

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

1. Montrer que l'application $\phi : \mathbb{K} \times E \longrightarrow E, (\lambda, x) \longmapsto \phi(\lambda, x) = \lambda x$, est continue.
2. Montrer que l'application $\xi : E \times E \longrightarrow E; (x, y) \longmapsto x + y$ est lipschitzienne de rapport 2.
3. Montrer que la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x}{\max\{1, \|x\|\}}$$

est 2-lipschitzienne.

Exercice 6

Soit $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(V, W)$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes:

1. u est continue en tous points de V .
2. u est continue en 0_V .
3. u est bornée sur la boule unité fermé $\overline{B}_V(0, 1)$ de V .
4. $\exists M > 0, \forall x \in V, \|u(x)\|_W \leq M\|x\|_V$.
5. u est lipschitzienne: $\exists M > 0, \forall x, y \in V, \|u(x) - u(y)\|_W \leq M\|x - y\|_V$.

Exercice 7

Montrer qu'une forme linéaire définie sur un espace vectoriel normé E est continue, si et seulement si son noyau est fermé dans E .

Exercice 8

Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^p y^q}{x^2 - xy + y^2}; & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

1. Pour quelles valeurs de p et q l'application f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?
2. Pour quelles valeurs de p et q l'application f est-elle différentiable sur $\mathbb{R}^2$?
3. Pour quelles valeurs de p et q l'application f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?
4. Pour quelles valeurs de p et q l'application f est-elle différentiable au sens de gâteaux au point $(0, 0)$?

Exercice 9

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ défini par $f(x, y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$.

1. f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?
2. f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?
3. f est-elle différentiable sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 10

Soit $f(x, y) = y^2 - x^2y + x^2$ et $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 1 \leq y \leq 1 - x^2\}$.

1. Représenter D et trouver une paramétrisation de Γ , le bord de D .
2. Justifier que f admet un maximum et un minimum sur D .
3. Déterminer les points critiques de f .
4. Déterminer le minimum et le maximum de f sur Γ .
5. En déduire le minimum et le maximum de f sur D .

Exercice 11

Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ et $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^{\neq}$ l'application définie par $g(u, v) = f(\cos u + \sin v; \sin u + \cos v, e^{u-v})$.

1. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$.
2. On suppose que f est différentiable au point $A = (1, 1, 1)$ de $\mathbb{R}^3$, et que sa différentielle en ce point est, en convenant d'identifier une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ avec sa matrice,

$$f'(A) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Déterminer la différentielle de g au point $B(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.