

TD1. Rappels sur les groupes

Exercice 1.

Soient $n \geq 1$, G un groupe et $f: \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow G$ un morphisme de groupe.

- (1) Montrer que f est complètement déterminé par $f(\bar{1})$.
- (2) Existe-t-il des éléments d'ordre 3 dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$? En déduire les morphismes de groupes de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.
- (3) On considère un morphisme de groupes $f: \mathbb{Z}/18\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$.
 - (a) Quels sont les ordres possibles de $f(\bar{1})$?
 - (b) En déduire les morphismes possibles f .
- (4) On cherche à déterminer de façon générale les morphismes possibles $f: \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.
 - (a) Montrer que si $f(\bar{1}) = \hat{a}$ alors $\frac{m}{n \wedge m}$ divise a .
 - (b) Montrer que $\frac{m}{n \wedge m}$ divise a alors il existe un unique morphisme $f_a: \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ tel que $f_a(\bar{1}) = \hat{a}$.
 - (c) Donner la condition sur m, n pour qu'il existe un seul morphisme $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$?
 - (d) Calculer en fonction de n, m le nombre de morphismes possibles $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

Exercice 2.

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

- (1) Soit $(G, \cdot)$ un groupe fini noté multiplicativement. Montrer que si $f: (\mathbb{Q}, +) \rightarrow (G, \cdot)$ est un morphisme de groupes alors f est trivial.
- (2) Soient $n, d \in \mathbb{N}^*$, G un groupe abélien d'ordre n noté multiplicativement et $f: G \rightarrow G$ l'application définie par $x \mapsto x^d$.
 - (a) Montrer que f est un endomorphisme de G .
 - (b) Montrer que si $n \wedge d = 1$ alors f est un automorphisme de G .
 - (c) En déduire que si n est impair alors tout élément de G est un carré.
- (3) Soit $c = (ijk)$ un cycle de S_4 et $\sigma \in S_4$. Calculer $\sigma \circ c \circ \sigma^{-1}$.

Exercice 3.

Soit G un groupe noté multiplicativement. On appelle *commutateur* de $x, y \in G$ l'élément $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy \in G$ et *groupe dérivé* de G le sous-groupe noté $[G, G]$ qui est engendré par les commutateurs des éléments de G .

- (1) Montrer $[G, G]$ est distingué dans G .
- (2) Déterminer $[G, G]$ puis $G/[G, G]$ lorsque G est un groupe commutatif.
- (3) Montrer que le groupe-quotient $G/[G, G]$ est commutatif.

- (4) Soit $f: G \rightarrow G'$ un morphisme de groupes. Montrer qu'il existe un unique morphisme de groupe $\bar{f}: G/[G, G] \rightarrow G'/[G', G']$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & G' \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ G/[G, G] & \xrightarrow{\bar{f}} & G'/[G', G'] \end{array}$$

- (5) Soient n est un entier ≥ 3 , S_n le groupe symétrique et A_n le sous-groupe alterné. On admettra le résultat suivant : **A_n est engendré par les 3-cycles.**
- (a) Montrer que $[S_n, S_n] \subset A_n$.
- (b) Montrer que tout 3-cycle est un commutateur et en déduire que $A_n \subset [S_n, S_n]$.
- (c) Déterminer $S_n/[S_n, S_n]$. Justifier la réponse.

Exercice 4.

Si G est un groupe $\text{Aut}(G)$ désigne l'ensemble des automorphismes de G .

- (1) Montrer $(\text{Aut}(G), \circ)$ est un groupe.
- (2) Montrer que l'application $\Phi: (\text{Aut}(\mathbb{Z}_n), \circ) \rightarrow (\mathbb{Z}_n^\times, \times)$ définie par

$$\Phi(f) = f(\bar{1}), \forall f \in \text{Aut}(\mathbb{Z}_n)$$

est un isomorphisme de groupes.

- (3) En déduire le cardinal du groupe $(\text{Aut}(\mathbb{Z}_n), \circ)$.
- (4) (a) Soient N et H des groupes et soit $\phi: H \rightarrow \text{Aut}(N)$ un morphisme de groupes. Notons $N \rtimes_\phi H$ l'ensemble $N \times H$ muni de la loi de composition définie par

$$(n_1, h_1) \rtimes_\phi (n_2, h_2) = (n_1 \phi(h_1)(n_2), h_1 h_2)$$

Montrer que $N \rtimes_\phi H$ est un groupe appelé *produit semi-direct* de H par N relativement à ϕ .

- (b) Montrer que le produit semi-direct $N \rtimes_\phi H$ est direct si et seulement si ϕ est le morphisme trivial.
- (c) Soit G un groupe et soient N et H des sous-groupes de G tels que $N \cap H = \{e\}$, $NH = G$ et $N \triangleleft G$.
- (i) Montrer que l'application $i: H \rightarrow \text{Aut}(N)$ définie par $h \mapsto i(h)$ où $i(h)(n) = hnh^{-1}$ est un morphisme de groupes.
- (ii) Montrer que l'application $f: N \rtimes_i H \rightarrow G$ définie par $(n, h) \mapsto nh$ est un isomorphisme de groupes. On dit alors que G est le *produit semi-direct* de H par N .