

	Concours EAMAC 2024	Cycle : TECHNICIEN
---	--	---

Epreuve de : Mathématiques

Durée : 03 heures

Exercice 1 (5points)

Lors d'une épidémie chez des bovins, on s'est aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt chez un animal, on peut le guérir ; sinon la maladie est mortelle.

Un test est mis au point et essayé sur un échantillon d'animaux dont 2 % est porteur de la maladie. On obtient les résultats suivants :

- si un animal est porteur de la maladie, le test est positif dans 85 % des cas ;
- si un animal est sain, le test est négatif dans 95 % des cas.

On choisit de prendre ces fréquences observées comme probabilités pour toute la population et d'utiliser le test pour un dépistage préventif de la maladie. On note respectivement M et T les événements « Être porteur de la maladie » et « Avoir un test positif ».

1. Construire l'arbre pondéré des probabilités. **(0.5pt)**
2. Un animal est choisi au hasard. Quelle est la probabilité que son test soit positif ? **(1pt)**
3. Un animal est choisi au hasard parmi ceux dont le test est positif. Quelle est la probabilité qu'il soit porteur de la maladie ? **(1pt)**
4. On choisit 6 animaux au hasard. La taille du troupeau est telle qu'on peut assimiler les tirages à des tirages avec remise. On note X la variable aléatoire qui, aux six animaux choisis, associe le nombre d'animaux ayant un test positif.
 - a. Quelle est la loi de probabilité de X ? **(1pt)**
 - b. Quelle est la probabilité pour qu'au moins un des six animaux ait un test positif ? **(1.5pt)**

Exercice 2 (5points)

Soient n un entier naturel et $(u_n)_n$ la suite définie par : $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x) dx$.

1. a) Calculer u_0 . **(0.5pt)**
b) Montrer que la suite (u_n) est positive et décroissante. **(1pt)**
2. a) Pour tout entier naturel n , déterminer la dérivée de la fonction h définie par $h(x) = \tan^{n+1}(x)$. **(0.5pt)**
b) En déduire que :
 - (i) Pour tout entier naturel n non nul ; $u_n + u_{n+2} = \frac{1}{n+1}$ (*) ; **(0.5pt)**
 - (ii) Pour tout entier naturel n non nul : $\frac{1}{2n+2} \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$; **(0.5pt)**
 - (iii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$. **(0.25pt)**c) on pose : pour tout entier naturel n non nul, $f(n) = u_{n+4} - u_n$.
En utilisant (*), montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $f(n) = \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+1}$. **(0.5pt)**
3. a) Calculer u_2 . **(0.25pt)**
b) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, f(2) + f(6) + f(10) + \dots + f(4n-2) = u_{4n+2} - u_2$. **(0.5pt)**
c) En déduire que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots - \frac{1}{4n-1} + \frac{1}{4n+1} \right) = \frac{\pi}{4}$. **(0.5pt)**

Exercice 3 (5points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $O, \vec{u}, \vec{v}$. Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z ($z \neq 1$), associe le point M' d'affixe z' telle :

$$z' = \frac{-iz-2}{z+1}.$$

A, B et C sont des points d'affixes respectives $a = -1$, $b = 2i$ et $c = -i$.

1. Déterminer, sous forme trigonométrique l'affixe c' de C' image du point C par f . **(0.5pts)**
2. Calculer l'affixe d du point D ayant pour image par f le point D' d'affixe $d' = \frac{1}{2}$ **(1pt)**
3. Pour tout nombre complexe z ($z \neq 1$), on note p le module de $z+1$ et p' le module de $z' + i$.
 - a) Démontrer que, pour tout nombre complexe z ($z \neq 1$), on a $pp' = \sqrt{5}$. **(1.5pt)**
 - b) Si le point M appartient au cercle (C) de centre A et de rayon 2, montrer que M' appartient à un cercle (C') dont on précisera les caractéristiques. **(1pt)**
 - c) Déterminer l'ensemble E des points M d'affixe z tels que z' soit un réel non nul et vérifier que le point D appartient à (E) et à (C). **(1pt)**

Exercice 4 (5points)

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x \ln(x^2 - x + 1) + 1}{x}$.

1. Déterminer D le domaine de définition de f . **(0.5pt)**
2.
 - a. Calculer les limites de f aux bornes de D. **(1pt)**
 - b. Interpréter les résultats obtenus. **(0.5pt)**
3. Calculer $f'(x)$, puis vérifier que $f'(x) = \frac{(x-1)(2x^2+1)}{x^2(x^2-x+1)}$. **(1pt)**
4. Etudier le sens de variation de f . **(0.5pt)**
5. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $] -\infty; 0[$ et vérifier que $-0.96 < \alpha < -0.95$. **(1pt)**
6. Tracer la courbe représentative de f . **(0.5pt)**