

## Epreuve de Mathématiques

Durée : 04heures

### Exercice 1 : Calcul Matriciel (2+1+2 :=05 pts)

On considère la matrice :  $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$ .

1. Montrer que A peut s'écrire sous la forme  $PDP^{-1}$  avec P une matrice carrée d'ordre 2 inversible d'inverse  $P^{-1}$ , et D une matrice carrée diagonale d'ordre 2 à coefficients réels.
2. On cherche à résoudre l'équation  $X^2 = A$ .
  - a. Montrer que si X est solution de cette équation alors  $P^{-1}XP$  commute avec D puis, qu'elle est diagonale.
  - b. Résoudre alors l'équation  $X^2 = A$ .

### Exercice 2 : Matrice et Endomorphisme (2+1+2 :=05 pts)

On note  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients dans  $\mathbb{R}$ .

Soit la matrice  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$  et f l'endomorphisme de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  défini par :  $f(M) = BM$ ,  $\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

1. Déterminer  $\text{Ker } f$ .
2. f est-il surjectif?
3. Trouver une base de  $\text{Ker}(f)$  et une base de  $\text{Im}(f)$ .

### Exercice 3 : Probabilité Appliquée (1+1+1+1 :=04 pts)

On s'intéresse à la durée de vie, exprimée en semaines, d'un composant électronique. On modélise cette situation par une loi de probabilité p de durée de vie sans vieillissement définie sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$  : la probabilité que le composant ne soit plus en état de marche au bout de t semaines est

$$p([0 ; t]) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx.$$

Une étude statistique, montrant qu'environ 50 % d'un lot important de ces composants sont encore en état de marche au bout de 200 semaines, permet de poser  $p([0 ; 200]) = 0,5$ .

1. Montrer que  $\lambda = \frac{\ln 2}{200}$ .
2. Quelle est la probabilité qu'un de ces composants pris au hasard ait une durée de vie supérieure à 300 semaines? On donnera la valeur exacte et une valeur approchée décimale au centième près.
3. On admet que la durée de vie moyenne  $d_m$  de ces composants est la limite quand A tend vers  $+\infty$  de  $\int_0^A \lambda x e^{-\lambda x} dx$ .
  - a. Montrer que  $\int_0^A \lambda x e^{-\lambda x} dx = \frac{-\lambda A e^{-\lambda A} - e^{-\lambda A} + 1}{\lambda}$
  - b. En déduire  $d_m$  on donnera la valeur exacte et une valeur approchée décimale à la semaine près.

**Exercice 4 : Intégrale à paramètre et Etude de fonctions (06 pts)**

On considère l'intégrale généralisée convergente  $\varphi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} e^{-xt} dt$ .

On considère ensuite les fonctions  $d(t) = t - 1 + \cos(t)$  et  $\delta(t) = \frac{t^2}{2} - 1 + \cos(t)$ .

**1. Etude des fonctions  $d$ , et  $\delta$ . (1+1 :=02 pts)**

- a) Étudier la fonction  $d$ ; en déduire qu'il existe un nombre réel  $\alpha$  tel que, pour tout nombre réel  $t$  strictement positif, on ait l'inégalité :

$$0 \leq \frac{1 - \cos(t)}{t} \leq \alpha.$$

- b) Étudier la fonction  $\delta$ ; en déduire qu'il existe un nombre réel  $\beta$  tel que, pour tout nombre réel  $t$  strictement positif, on ait l'inégalité :

$$0 \leq \frac{1 - \cos(t)}{t^2} \leq \beta.$$

**2. Existence de la fonction  $\varphi$  sur  $[0, +\infty[$ . (01 pt)**

Établir la convergence de l'intégrale généralisée  $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt$ . En déduire que  $\varphi(x)$  existe pour tout  $x$  appartenant à  $[0; +\infty[$ .

**3. Limite de la fonction  $\varphi$  en  $+\infty$ . (0.5+0.5 :=01 pt)**

- a) Préciser le signe de  $\varphi(x_1) - \varphi(x_2)$  pour  $0 \leq x_1 \leq x_2$ .

En déduire que la fonction  $\varphi$  admet une limite finie  $\lambda$  en  $+\infty$ .

- b) Déterminer la valeur de  $\lambda$  ( on pourra utiliser les résultats précédents).

**4. Expression explicite de  $\varphi$  (0.5+0.5+0.5+0.5 :=02 pts)**

- a) Déterminer la limite de  $x \ln \left( \frac{x^2}{x^2 + 1} \right)$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .

- b) Expliciter une primitive de la fonction  $x \mapsto \ln(x^2 + 1)$  ( On pourra utiliser une intégration par parties)

- c) En supposant que  $\varphi'(x) = \ln(x) - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2)$  pour  $x > 0$ , expliciter  $\varphi(x)$  pour  $x$  appartenant à  $]0; +\infty[$ .

- d) Déterminer  $\varphi(0)$ .

Epreuve de Physique

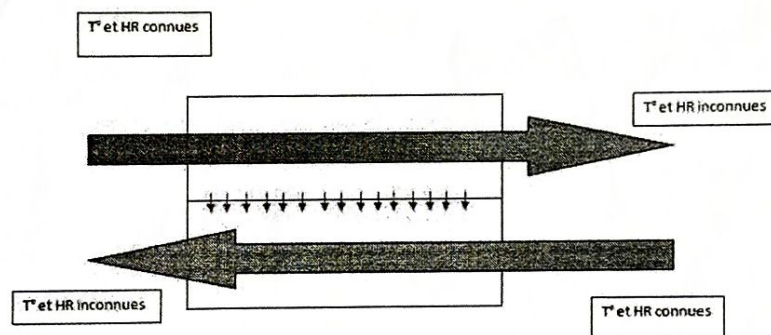
Durée : 4 h

**Exercice 1 : (05 points)**

L'installation de la figure ci-dessous est une pompe à chaleur fonctionnant entre la source chaude constituée du local à chauffer à  $T_C = 293\text{K}$  et la source froide, l'atmosphère à  $T_F = 268\text{K}$ .

L'air, assimilé à un gaz parfait de masse molaire  $M = 29\text{g/mol}$  et de  $\gamma = 1,4$  est prélevé dans l'atmosphère dans l'état  $E_1$  ( $P_1 = 1\text{ bar}$ ,  $V_1$ ,  $T_1 = 268\text{K}$ ).

Il traverse alors un échangeur thermique (ET) et sort à l'état  $E_2$  ( $P_2 = 1\text{ bar}$ ,  $V_2$ ,  $T_2$ ).



Dans cet échangeur, il croise un fluide qui évolue de  $E_4$  ( $P_4 = 2\text{ bars}$ ,  $V_4$ ,  $T_4$ ) à  $E_5$  ( $P_5 = 2\text{ bars}$ ,  $V_5$ ,  $T_5 = 268\text{K}$ ). Donc  $T_4 = T_2$  et  $T_5 = T_1$ .

L'air traverse alors le local chauffé (L) où il cède un transfert thermique à la source chaude évolue de  $E_2$  ( $P_2$ ,  $V_2$ ,  $T_2$ ) à  $E_3$  ( $P_3$ ,  $V_3$ ,  $T_3 = 293\text{K}$ ).

Il est ensuite comprimé réversiblement dans le compresseur ( $C_p$ ) calorifugé et passe de  $E_3$  à  $E_4$ . Il traverse l'échangeur thermique passant de  $E_4$  ( $P_4 = 2\text{ bars}$ ,  $V_4$ ,  $T_4$ ) à  $E_5$  ( $P_5 = 2\text{ bars}$ ,  $V_5$ ,  $T_5 = 268\text{K}$ ). Enfin il se détend réversiblement dans la turbine calorifugée passant de  $E_5$  ( $P_5 = 2\text{ bars}$ ,  $V_5$ ,  $T_5 = 268\text{K}$ ) à  $E_6$  ( $P_6 = 1\text{ bar}$ ,  $V_6$ ,  $T_6$ ).

L'installation fonctionne en régime permanent avec un débit massique identique dans tous les éléments de l'installation. On raisonne sur une durée  $\tau$  correspondant au transfert d'un kilogramme d'air dans le cycle.

1. Justifier la valeur de  $M$  choisi pour l'air.
2. Calculer  $T_4$ .



3. Calculer  $W_{3-4}$  reçu dans le compresseur  $C_P$ .
4. Calculer  $T_6$  et  $W_{5-6}$ .
5. Sachant que la turbine est utilisée pour entraîner partiellement le compresseur ; calculer le travail  $W$  effectivement reçu par l'installation.
6. Calculer  $Q_C$  reçu à la traversée du local.
7. Calculer  $e_{pompe}$  et comparer à  $e_{pompe}$  Carnot. Commenter.

## Exercice 2 (06 points)

L'énergie nucléaire, si elle a des inconvénients, présente l'avantage majeur de ne pas produire de gaz à effet de serre, contrairement à l'utilisation des combustibles fossiles.

- 1) On rappelle la loi de Wien : la longueur d'onde  $\lambda_{max}$ , correspondant au maximum d'émission lumineuse du corps noir, et la température  $T$  du corps noir sont liées par la relation :

$\lambda_{max} \cdot T = 2,9 \cdot 10^3 \text{ K} \cdot \mu\text{m}$ . En considérant qu'un corps à température ambiante émet un rayonnement thermique dont le spectre présente un maximum pour la longueur d'onde  $10 \mu\text{m}$ , estimer la température de surface  $T_S$  du soleil ( $\lambda_{max}=0,5 \mu\text{m}$ )

- 2) On rappelle la loi de Stefan-Boltzmann : la puissance émise par rayonnement d'un corps noir de surface  $S$  et de température  $T$  est :  $P_{th} = \sigma S T^4$

On donne :

- la constante de Stefan-Boltzmann :  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ SI}$ ,
- la célérité de la lumière dans le vide  $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ,
- la constante de Planck :  $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ ,
- la constante de Boltzmann :  $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ ,
- le rayon du soleil :  $R_S = 7,00 \cdot 10^5 \text{ km}$
- et la distance terre soleil :  $D = 150 \cdot 10^6 \text{ km}$ .

- 2.a) Quelles sont les unités de  $\sigma$  dans le système international ?

- 2.b) On cherche à exprimer  $\sigma$  en fonction de constantes fondamentales sous la forme :

$\sigma = A C^\alpha k_B^\beta h^\gamma$  où  $A$  est sans dimension. Déterminer  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  et  $A$ .

- 2.c) Calculer numériquement la puissance thermique totale  $P_{tot}$  rayonnée par le soleil.

- 2.d) Calculer numériquement la puissance thermique reçue par mètre carré de surface terrestre  $\varphi_s$  (en  $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$ ), par rayonnement solaire. Cette valeur est-elle cohérente avec celle donnée par la littérature : En plein été, une surface perpendiculaire aux rayons solaires reçoit environ  $10^3 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$  d'énergie lumineuse ?

- 2.e) Calculer les valeurs de la puissance thermique émise par mètre carré de surface terrestre  $\varphi_t(\theta)$  (en  $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$ ) quand la Terre est aux températures  $\theta = 0^\circ \text{ C}$  et  $\theta = 25^\circ \text{ C}$ . Ces valeurs sont-elles

cohérentes avec celles données par la littérature : Pour un « corps noir », censé absorber tout rayonnement incident, la puissance rayonnée croît comme la puissance quatrième de la température absolue. À 0 °C, elle est égale à 315 watts par mètre carré, mais atteint 450 watts par mètre carré à 25 °C (les chiffres sont légèrement inférieurs pour les corps ordinaires qui nous entourent) ?

2.f) Faire un développement limité au premier ordre de  $\varphi_t(\theta)$  pour  $\theta$  proche de  $\theta_0 = 25^\circ\text{C}$  et en déduire

$$\frac{\varphi_t(\theta) - \varphi_t(\theta_0)}{\theta - \theta_0}$$

L'affirmation : « autour de 25°C, l'objet émet 6W par mètre carré et par degré d'écart » est-elle justifiée par votre calcul ?

3) Effet de serre.

3.a) Faire un bilan énergétique appliqué à la Terre en absence de serre et exprimer la température  $T$  de la Terre en fonction de  $\varphi_s$  et de  $\sigma$ .

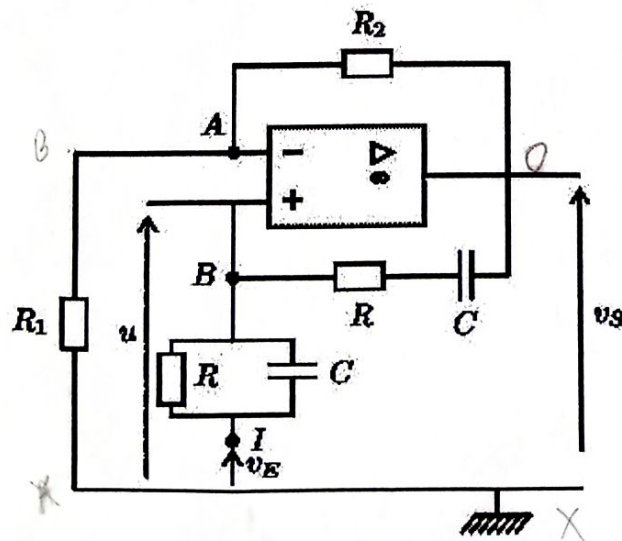
3.b) De même, exprimer la température  $T_0$  de la Terre en fonction de  $\varphi_s$  et de  $\sigma$  lorsqu'est présente une serre (on négligera tout autre échange thermique que le rayonnement et on fera les mêmes hypothèses sur l'absorption et la transparence du verre).

Discuter l'affirmation selon laquelle *le rayonnement de la Terre double lorsqu'est présente une serre*.

3.c) En supposant qu'en l'absence de serre la Terre est à 12°C, estimer la température dans la serre. Discuter le résultat.

### Exercice 3 (04,5 points)

L'amplificateur opérationnel est idéal et fonctionne en régime linéaire (voir figure ci-dessous). La tension  $v_E$  est une tension sinusoïdale, de pulsation  $\omega$ . On pose  $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ ,  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$  et  $X = x - \frac{1}{x}$



1. a. Déterminer  $K = \frac{V_S}{\underline{U}}$ .

1. b. Exprimer  $\underline{U}$  en fonction de  $V_S$  et  $V_E$ .

1. c. Montrer que l'on peut écrire :

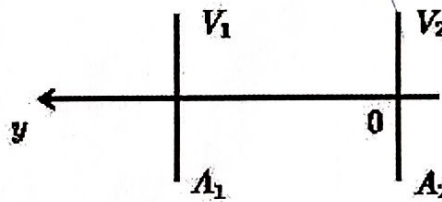
$$\underline{U} = T \underline{V_E} + \frac{1}{3 + jX} V_S$$

2. Exprimer  $V_S$  en fonction de  $K$ ,  $X$  et  $V_E$ .

3. Déterminer la valeur du couple  $(K, \omega)$  pour laquelle on a des oscillations sinusoïdales avec une tension d'entrée nulle.

#### Exercice 4 (04,5 points)

Un condensateur plan est formé de deux armatures planes, conductrices, parallèles,  $A_1$  et  $A_2$ , de surface  $S$ , distantes de  $e$ , portées aux potentiels respectifs  $V_1$  et  $V_2$  dans l'air de permittivité  $\epsilon_0$ . En négligeant les effets de bord le potentiel  $V(M)$  en un point  $M$  entre les armatures ne dépend que de sa distance  $y$  à l'armature  $A_2$ .



1. Déterminer le potentiel  $V(y)$ , le champ électrique  $E(M)$  et les densités surfaciques de charge  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  sur les deux armatures en fonction de  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $e$  et  $\epsilon_0$ . En déduire la capacité  $C$  du condensateur.

2. Déterminer la force électrique exercée par l'armature  $A_2$  sur l'armature  $A_1$ . L'axe  $Oy$  est horizontal, l'armature  $A_2$  est fixe, l'armature  $A_1$ , mobile horizontalement, est reliée à deux ressorts horizontaux de raideur  $k/2$  de telle façon que la distance entre  $A_1$  et  $A_2$  soit  $e$  si les ressorts sont au repos et le condensateur déchargé. La position de  $A_1$  sera repérée par sa distance  $y$  à  $A_2$ .

3. À l'équilibre,  $Q_0$  est la charge (portée par  $A_1$ ) du condensateur,  $C_0$  sa capacité et  $y = y_0$ . Donner l'expression de  $Q_0$  et de la force électrique exercée sur  $A_1$  en fonction de  $S$ ,  $U_0$  et  $y_0$ .

4. Tracer le graphe de  $U_0$  en fonction de  $y_0$ . Montrer que pour des valeurs de  $U_0$  inférieures à une valeur limite  $U_m$  que l'on déterminera, il y a deux positions d'équilibre dont on discutera la stabilité.





**Epreuve d'Anglais**

**Durée : 2h**

**Text: Meritocracy: a Myth Invented by the Rich**

The US college admissions scandal is fascinating, if not surprising. Over 30 years wealthy parents have been criminally charged over a scheme in which they allegedly paid a company large sums of money to get their children into top universities. The duplicity involved was extreme: everything from paying off university officials to inventing learning disabilities to facilitate cheating on standardized tests. One father even faked a photo of his son pole vaulting in order to convince admissions officers that the boy was a star athlete.

It is no secret that wealthy people will do nearly anything to get their kids into good schools. But this scandal only begins to reveal the lies that sustain the American idea of meritocracy. William 'Rick' Singer, who admitted to orchestrating the scam, explain that there are three ways in which students can get into the college of their choice. 'There is a front door which you get in on your own. The back door is institutional advancement, which is 10 times as much money. And I've created this side door.' The 'side door' he is referring to outright crime, literally paying bribes and faking test scores. It's impossible to know how common that is, but there's a reason to suspect it's comparatively rare. Why? Because for the most part, the wealthy don't need to pay illegal bribes. They can already pay perfectly legal ones.

In his 2006 book *The Price of Admission: How America's Ruling Class Buys its Ways into Elite Colleges*, Daniel Golden exposes the way that the top schools favour donors and the children of alumni. A Duke admissions officer recalls being given a box of applications she had intended to reject, but which were returned to her for 'special' reconsideration, in cases where parents were expected to give very large donations upon a student's admission [...]

It's not just donations that put the wealthy children ahead. Children of the top 1% (and the top 5%, and the top 20%) have spent their entire lives accumulating advantages over their counterparts at the bottom. Even in first grade the difference can be stark: compare the learning environment at one of Detroit's crumbling public elementary school to that at a private elementary school that costs tens of thousands dollars a year. There are high schools, such as Phillips Academy in Andover, Massachusetts, that have billion-dollar endowments. Around the country, the level of education you receive depend on how much money your parents have. [...]

As long as there are large wealth inequalities, there will be colossal differences in the opportunities that children have. No matter what admissions criteria are set, wealthy children will have the advantage. [...] It's simple: wealth always confers greater capacity to give your children the edge over the other people's children [...]

In reality, there can never be such a thing as a meritocracy, because there never going to be a full equal opportunity. The main function of the concept is to assure elites that they deserve their position in life. It eases the 'anxiety of affluence', rather than the products of their own individual ingenuity and hard work.

There's something perverse about the whole competitive college system. But we can imagine a different world. If everyone was guaranteed free, high-quality public university education, and a public-school education matched the quality of a private school education, there would not be anything to compete for. [...]

Nathan Robinson, 14 March 2019, The Guardian [abridged]

## **QUESTIONS**

### **I. GUIDED COMMENTARY (8pts)**

1. According to the text, how did the US rich parents manage to obtain admissions for their kids in top qualities educational institutions during the three decades? **(2pts)**
2. What does this attitude of American parents show behind the idea of meritocracy? **(1pt)**
3. Give two unfair facts in the educational environment in relationship with the children's parents' status, relying on the text. **(2pts)**
4. What shows is in this text that there is no actual meritocracy in the US system of recruitment at schools or at colleges? **(1pt)**
5. How does the author perceive idea of meritocracy in the US system admissions at schools or colleges? **(2pts)**

### **II. SUMMARIZING (6pts)**

The text you read is composed of 565 words. Write a short summary of it in 200 words using your own words. A margin of less or more than 10 words is tolerable. Indicate the number words at the bottom of your summary.

### **III. ESSAY WRITING (6pts)**

How can we help school institutions effectively apply the principles of meritocracy in their process of recruitment? In three different coherent paragraphs between 100 and 150 words, propose three good strategies with good examples. Make sure you have used good English.

**GOOD LUCK**

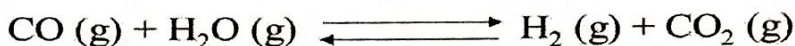


**Epreuve de Chimie**

**Durée : 3 h**

**Exercice 1** : Toutes les questions sont indépendantes sauf les questions 3°) et 4°)

- 1°) Donner les significations des quatre nombres quantiques  $n$ ,  $l$ ,  $m_l$  et  $m_s$ .  
 2°) Représenter la configuration électronique du gallium Ga ( $Z = 31$ ). En déduire le nombre d'électrons non appariés.  
 3°) Calculer l'enthalpie libre standard  $\Delta G^\circ_{r,298K}$  de la réaction suivante :



**On donne :**

|                                                                    | CO (g) | H <sub>2</sub> O (g) | H <sub>2</sub> (g) | CO <sub>2</sub> (g) |
|--------------------------------------------------------------------|--------|----------------------|--------------------|---------------------|
| $\Delta H^\circ_{f,298K} \text{ (kJ.mol}^{-1}\text{)}$             | -110,4 | -241,6               | 0                  | -393,1              |
| $S^\circ_{f,298K} \text{ (J.mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}\text{)}$ | 197,7  | 188,7                | 130,6              | 213,4               |

- 4°) La réaction précédente est-elle thermodynamiquement possible ? Pourquoi ?  
 5°) Ecrire la loi de Nernst du couple  $\text{MnO}_4^-/\text{Mn}^{2+}$   
 6°) Donner l'expression de la f.e.m. d'une pile constituée d'une part de 100 mL d'une solution d'ions  $\text{Fe}^{2+}$  (0,1 M) et d'ions  $\text{Fe}^{3+}$  (0,1 M) et d'autre part de 100 mL d'une solution d'ions  $\text{Sn}^{2+}$  (0,02 M) et d'ions  $\text{Sn}^{4+}$  (0,02 M). **Faire l'application numérique**

**On donne** :  $E^\circ (\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}) = 0,77 \text{ V}$  ;  $E^\circ (\text{Sn}^{4+}/\text{Sn}^{2+}) = 0,15 \text{ V}$

- 7°) Déterminer la solubilité  $S$  de AgCl ( $\text{pks} = 9,7$ ) dans une solution de chlorure de sodium de concentration  $C = 1,0 \cdot 10^{-2} \text{ mol/L}$ .

**Exercice 2**

L'analyse élémentaire d'un composé organique ne refermant que du carbone, de l'hydrogène, de l'azote et de l'oxygène a donné les résultats suivants : C = 55,1% ; H = 10,5 % ; N = 15,9 %  
 La détermination du poids moléculaire par cryométrie a été effectué sur 0,5 g de substance dissoute dans 50 g d'acide éthanóïque. L'abaissement du point de congélation a été de

$\Delta\theta = 0,45\text{ }^{\circ}\text{C}$ . En rappel  $\Delta\theta = KC/M$  avec :

- K : constante cryoscopique de l'acide éthanoïque = 39
- C : concentration de la substance, en g dans 100 g de solvant
- M : masse molaire du composé

1°) Trouver la formule brute du composé étudié.

2°) Calculer son nombre d'insaturation.

3°) Donner les structures de deux (02) isomères répondant à cette formule et renfermant :

- L'un une fonction amide
- L'autre une fonction amine et une fonction aldéhyde

Données en g/mol : M (C) = 12,0 ; M (H) = 1,0 ; M (O) = 16,0 ; M (N) = 14,0

### Exercice 3

Prévoir les produits (**noms et formules semi-développées**) issus des réactions suivantes :

1°) Propanoate de sodium + chlorure d'éthanoyle

2°) Acide éthanoïque + méthanol

3°) Propène + eau

4° Polymérisation du chlorure de vinyle  $\text{CH}_2=\text{CHCl}$