



CONCOURS D'ENTRÉE AU CYCLE INGENIEUR

Session de 2019

Filières : Industriel, Textile, Informatique, Télécommunication

Epreuve : Algèbre

Durée : 04 heures

Aucun document autorisé

Exercice 1.

Soit a un nombre réel non nul et

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & a^2 \\ 1/a & 0 & a \\ 1/a^2 & 1/a & 0 \end{bmatrix}$$

Calculer le polynôme minimal de A puis son polynôme caractéristique. Déterminer A^n pour tout entier n .

Exercice 2.

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace euclidien.

- Montrer que pour toute forme linéaire ϕ de E , il existe un et un seul vecteur u de E tel que : $\forall x \in E, \phi(x) = \langle u | x \rangle$.
Soit à présent $f \in L(E)$.
- Montrer qu'il existe une et une seule application de E dans E , notée f^* , telle que : $\forall x, y \in E, \langle f(x) | y \rangle = \langle x | f^*(y) \rangle$.
- Montrer que f^* est linéaire. On l'appelle l'adjoint de f .
- Soient B une base orthonormale de E et $A = M_B(f)$ (la matrice de f dans la base B). Déterminer $M_B(f^*)$ (la matrice de f^* dans la base B).

Exercice 3.

$\mathbb{R}$ désigne le corps des nombres réels. On désigne par M le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels. On se donne trois réels $\{a, b, c\}$, avec $b \neq 0$ et on pose :

$$F = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & c \end{bmatrix}, I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- (a) Montrer que l'ensemble des matrices de M qui commutent avec F est un sous-espace vectoriel de M . On le note $\mathcal{F}$.
(b) Montrer que $\{F, I\}$ est une base de $\mathcal{F}$.
(c) Etablir que pour tout entier naturel n , F^n appartient à $\mathcal{F}$.
- Pour tout entier naturel n , on pose $F^n = \alpha_n F + \beta_n I$.
(a) Justifier l'existence de (α_n, β_n) .
(b) Déterminer α_2 et β_2 en fonction de a, b, c . Que dire de F si $\beta_2 = 0$?
(c) Déterminer une relation de récurrence entre α_n, α_{n+1} et α_{n+2} .
(d) Déterminer les suites $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ quand $a = 3$ et $b = c = -2$.
(e) Déterminer les suites $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ quand $a = 3$ et $b = c = 1$.
- (a) Montrer que $\mathcal{F}$ est un anneau commutatif pour les lois matricielles habituelles.
(b) A quelle condition nécessaire et suffisante, portant sur α_2 et β_2 , $\mathcal{F}$ est-il un corps?
(c) Dans le cas où $\mathcal{F}$ est un corps, résoudre l'équation $X^2 = -I$. Que peut-on en conclure pour le corps $\mathcal{F}$?
(d) $\mathcal{F}$ est-il un corps pour les cas indiqués aux questions 2 (d) et 2 (e)? Si oui, caractériser tous ses éléments non inversibles.

4. On considère l'endomorphisme u de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{M}$ défini par :

$$u : M \in \mathcal{M} \mapsto FM$$

(a) Montrer que F est stable par u .

(b) Établir que u est un automorphisme de $\mathcal{M}$ si et seulement si F est une matrice inversible.

(c) Donner la matrice de u dans la base formée des matrices :

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(d) À quelle condition nécessaire et suffisante, portant sur α_2 et β_2 , u est-il diagonalisable sur R ?
Déterminer les valeurs propres de u dans chacun des cas indiqués aux questions 2 (d) et 2 (e).



CONCOURS D'ENTRÉE AU CYCLE INGENIEUR

Session de 2019

Filières : Industriel, Textile, Informatique, Télécommunications

Epreuve : Analyse

Durée : 04 heures

Aucun document ni calculatrice n'est autorisé.

Il est recommandé de bien lire l'énoncé. Cette épreuve comprend quatre exercices. Si vous trouvez une incohérence dans l'énoncé ou une erreur, veuillez l'indiquer en le justifiant, la rectifier et continuer ensuite le traitement du sujet. Le barème est à titre indicatif.

Exercice 1 (04 points). Les questions 1. et 2. sont indépendantes.

1. Trouver une solution non triviale développable en série entière de l'équation différentielle :

$$xy'' + 2y' - \omega^2 xy = 0$$

2. Déterminer le rayon de convergence des séries entières de terme général ci-dessous. Calculer le cas échéant leur somme :

(a) $\frac{x^n}{n!(n+2)}$

(b) $x^n \cos n\alpha$

Exercice 2 (03 points). Les questions 1. et 2. sont indépendantes.

1. Soient $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_{p-1}, a_p$, $p+1$ nombres réels vérifiant :

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{p-1} + a_p = \sum_{k=1}^p a_k = 0$$

Etablir que : $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^p a_k \sqrt{n+k} = 0$.

2. On considère la suite de nombres réels $(u_n)_{n \geq 0}$, définie par : $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + \frac{1}{2n}}$; $u_0 = 1$.

Etablir que : $u_{n+1} < u_n + \frac{1}{2n+1}$ pour $n > 0$.

En déduire que la suite (u_n) est convergente et trouver sa limite.

Exercice 3 (05 points). La fonction Gamma

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose : $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$

1. Etudier suivant les valeurs de x la convergence de l'intégrale $\Gamma(x)$.
2. Calculer $\Gamma(1)$ et établir pour $x > 0$ que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. En déduire $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Montrer que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{2\pi}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $\Gamma(n + \frac{1}{2})$.
4. Justifier que la dérivée p -ième de Γ est : $\Gamma^{(p)}(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} (\ln(t))^p t^{x-1} dt$.
Que dire de la convexité de la fonction Γ ?

Exercice 4 (68 points). Les questions 1., 2. et 3. sont indépendantes.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n k^2$.

(a) Établir que $S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

(b) Soit f_n définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$f_n(x) = \frac{p^2}{n^2} \text{ si } x \in \left[\frac{p}{n}, \frac{p+1}{n} \right] \text{ pour } p \in \mathbb{N} \text{ et } 0 \leq p \leq n-1 \text{ et } f_n(1) = 1.$$

Vérifier que f_n est une fonction en escalier sur $I = [0, 1]$.

(c) On pose $F_n = \int_0^1 f_n(t) dt$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n$ existe puis la déterminer.

2. On considère dans $\mathbb{R}$ un intervalle $I = [a, b]$ et $S_n = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ une subdivision de I telle que : $\forall k \in \mathbb{N}; 0 \leq k < n; x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{n}$.

On rappelle la définition de l'intégrale de Riemann d'une fonction f continue sur I :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{b-a}{n} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right).$$

En déduire pour f , a et b convenablement choisis la limite en plus l'infini de T_n ci dessous :

$$T_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n}}$$

3. L'aire de la surface de révolution engendrée par la rotation de la courbe d'équation $y = f(x)$ pour $(a \leq x \leq b)$ autour de l'axe (Ox) est donnée par la formule :

$$A(f, a, b) = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \text{ où } f \text{ est une fonction dérivable.}$$

Calculer l'aire du tronc de sphère de rayon R sachant que cette surface est engendrée par la rotation autour de l'axe (Ox) de la courbe d'équation : $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ pour $-\frac{R}{2} \leq x \leq \frac{R}{2}$.

Bon courage !



KPE

CONCOURS D'ENTRÉE AU CYCLE INGENIEUR

Session de 2019

Filières : Industriel, Textile, Informatique, Télécommunication

Epreuve : Anglais

Durée : 02 heures

Aucun document autorisé

Read the text very carefully and then write a precis using 1/3 of its original length, providing it with a title and indicating the number of words at the end; a margin of 10% is allowed.

Those modern-day textile workers complaining that technology is taking people's jobs may have to eat their hats. Research by economists shows technology has created more jobs than it's destroyed – and they have 140 years of data to prove it.

Data compiled by management consultants Deloitte from the census data for England and Wales stretching back to 1871 suggest that the growth of jobs in the creative, care, tech and business service industries has more than offset the loss of jobs in the agricultural and manufacturing sectors. The report, which was shortlisted for an economics prize earlier this year, focused on the employment numbers between sectors that have either been hit or helped by technology.

"It's been very easy to identify where jobs have been destroyed. Job losses generally are very conspicuous, whether it's a middle manager replaced by software, or checkout staff displaced by auto terminals, whereas job gains are harder to identify," Ian Stewart, a chief economist at Deloitte, and one of the three authors of the report, told CNBC.

For example, 6.6 percent of the U.K. workforce was classified as agricultural workers in 1871. That number has fallen by 95 percent to 0.2 percent in 2011. Manufacturing jobs have dropped from 38 percent of the labor force in 1948 to 8 percent in 2012, Stewart said. Meanwhile, the number of accountants counted in the U.K. in 2011 was over 2,000 percent higher than it was 140 years ago, the report showed. Technology has also complemented industries like medicine and management consultancy, where it has boosted productivity and subsequent demand for these specializations has increased, Stewart explained.

Since 1992 alone, U.K. Labor Force Survey data shows a 909 percent increase in nursing auxiliaries and assistants, and a 580 percent increase in teaching staff. That's against a 82 percent decline in footwear and leather trade positions and a 79 percent slide in textile workers.

Stewart also emphasized the effect of technology on consumer behavior. As machines replace labor, and products become cheaper, consumers are throwing their money at new products and services. "They spend it on entirely unthought-of new areas: gym membership, short holidays, and overpriced coffees. Those sectors in turn create new employment."

"Human desires are infinite," Stewart explained. "And once we have enough food to eat, 100 pairs of trousers, we look for more. I wouldn't bet against the evolution of human desire."

But the future of work isn't entirely rosy, with the report predicting that income inequality will widen as economies increasingly reward high level education and skills that can service a high-tech society.

It will require governments to review education and training policies as well as income distribution schemes, Stewart said. "I'm not saying tech is the answer to everything, but there's very strong evidence of job creation." (461 words)



CONCOURS D'ENTRÉE AU CYCLE INGENIEUR Session de 2019

Filières : Industriel, Textile, Informatique, Télécommunications

Epreuve : Physique

Durée : 04 heures

Cette épreuve comporte trois (3) parties indépendantes ; Chaque partie est à traiter sur une copie différente.

Calculatrices non programmables : autorisées pour les calculs numériques

Partie I : Optique géométrique

Exercice

On considère une lentille en forme de demi-sphère de rayon R et d'indice n plongée dans l'air d'indice 1. Un faisceau cylindrique (de rayon d) de lumière monochromatique arrive sous incidence normale sur la face plane de la lentille ; le faisceau incident est issu d'un point objet A situé à l'infini dans la direction de l'axe optique de la lentille figure 1.

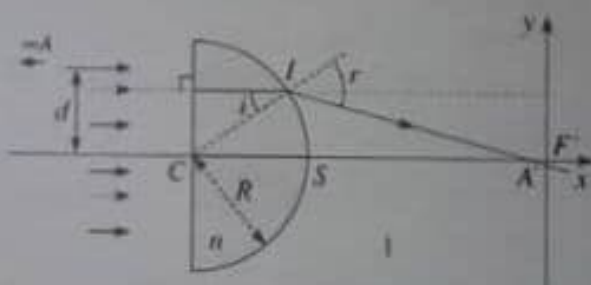


Figure 1

1) a- On considère un rayon du faisceau incident. Etablir la relation donnant $\overline{CA'}$ en fonction de $R = \overline{CS}$ et des angles i et r .

Indications : utiliser la figure 2 ; on commencera par déterminer les angles β et θ .

b- En déduire la limite $\overline{CF'}$ de $\overline{CA'}$ lorsqu'on se place dans l'approximation de Gauss ($d \ll R$ et r et i très petits).

Indication : utiliser la relation de Descartes pour les angles très petits.

c- Vérifier que, dans ces conditions, tous les rayons paraxiaux incidents parallèles à l'axe optique émergent de la lentille en passant par le point F' : F' est donc l'image de A

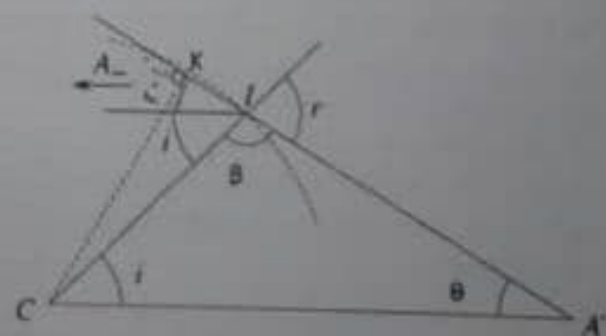


Figure 2

dans les conditions de Gauss (stigmatisme approché) et représente le foyer image F' de la lentille.

2) Quelle est la valeur limite d_0 du rayon du faisceau incident si l'on veut que tous les rayons lumineux ressortent de la lentille ? Faire l'application numérique pour $n=1,5$ et $R=5\text{cm}$.

3) Calculer les valeurs numériques de la distance $\overline{CA'}$ pour des rayons incidents dont la distance d à l'axe optique vaut $d_1=0,5\text{cm}$; $d_2=1\text{cm}$; $d_3=1,5\text{cm}$ et $d_4=2\text{cm}$.

4) Faire un développement limité en i et en r à l'ordre 2 de $\overline{CA'}$ et en déduire une expression approchée de la distance $\overline{CA'}$ en fonction de n , R et i .

Formules mathématiques

Développements limités : $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$ et $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots$

Partie II : Mécanique

Exercice 1

Une mouche M parcourt l'aiguille des secondes d'une horloge avec une accélération constante a_0 et, à l'instant $t = 0$, elle est au centre O de l'horloge avec une vitesse nulle, alors que l'aiguille indique « 0 seconde ».

R est le référentiel terrestre. Il est défini par (O, x, y, z) , repère fixe de R . R' est le référentiel lié à l'aiguille des secondes OX . A $t = 0$, OX coïncide avec Oy .

On utilisera les coordonnées polaires de M , (ρ, θ) , et pour exprimer les différents vecteurs, la base $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$.

1. Vitesse et accélération en coordonnées cylindriques. En notant $\overline{OM} = \rho \vec{u}_\rho$, et en considérant $\vec{u}_z$ comme troisième vecteur de la base cylindrique :
 - a. Donner l'expression générale de la vitesse en coordonnées cylindriques.
 - c. Donner l'expression générale de l'accélération en coordonnées cylindriques.
2. Mouvement de M dans R'
 - a. Déterminer l'équation horaire $\rho(t)$ du mouvement de M .
 - b. La mouche atteint l'extrémité de l'aiguille qui mesure 20 cm en 60 s. Quelle est la valeur de a_0 ?
3. Mouvement de M dans R
 - a. Donner l'équation de la trajectoire en coordonnées polaires. Donnez sa nature.
 - b. Donner l'expression du vecteur vitesse de M , $\vec{V}_{M/R}$, en utilisant la loi de composition des vitesses.
 - c. Donner l'expression de son vecteur accélération $\vec{a}_{M/R}$ en utilisant la loi de composition des accélérations.

Exercice 2

On assimile un arbre à une tige longue et homogène de longueur L et de masse m . On le scie à sa base et l'arbre bascule en tournant autour de son point d'appui au sol.

On suppose que le point d'appui reste fixe et ne glisse pas et on repère la position de l'arbre par l'angle θ qu'il fait avec la verticale. A $t = 0$, l'arbre fait un angle $\theta_0 = 5^\circ$ avec la verticale et est immobile.

On donne le moment d'inertie par rapport à son extrémité $I = \frac{1}{3} mL^2$.

1. Etablir l'équation du mouvement de chute de l'arbre.
2. Montrer que, lorsque l'arbre fait un angle θ avec la verticale, sa vitesse angulaire vaut

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{3g}{L} (\cos \theta_0 - \cos \theta)}$$

3. Montrer que cette relation peut être réécrite : $\sqrt{\frac{3g}{L}} dt = \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta_0 - \cos \theta}}$

4. Déterminer le temps de chute d'un arbre de 30 m. On prendra $g = 10 \text{ m s}^{-2}$. On donne pour $\theta_0 = 5^\circ$: $\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta_0 - \cos \theta}} = 5,1$

Partie III : Electromagnétisme

Formulaire : $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A}) = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \vec{e}_z$

$$\overrightarrow{\text{rot}}[\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A})] = \text{grad}[\text{div}(\vec{A})] - \Delta \vec{A}$$

Problème

Notations

Dans tout le problème, $\langle f(M, t) \rangle$ désigne la valeur moyenne dans le temps de la grandeur $f(M, t)$.

La pulsation ω sera toujours réelle, positive et non nulle.

A toute grandeur $f(M, t) = A(M) \cos[\omega t - \varphi(M)]$, on pourra associer la grandeur complexe $\underline{f}(M, t) = A(M) \exp i[\omega t - \varphi(M)]$

I- Ondes électromagnétiques dans le vide

- 1) Rappeler les équations de Maxwell en présence de charges et de courants.
- 2) Etablir l'équation de propagation du champ $\vec{E}(M, t)$ dans le vide (en l'absence de charges et de courants).
- 3) On considère une onde électromagnétique plane, progressive, monochromatique, polarisée rectilignement dont le champ électrique en notation complexe s'écrit :

$$\underline{\vec{E}}(M, t) = E_0 \exp i(\omega t - kx) \vec{e}_y, \text{ où } E_0 \in \mathbb{R}^+, \text{ et } k \in \mathbb{R}^+.$$

3-a A quelle condition sur k et ω cette onde est-elle une solution de l'équation de propagation ?

3-b Comment appelle-t-on cette relation ?

3-c Le vide est-il un milieu dispersif ?

4) Déterminer l'expression réelle du champ magnétique $\vec{B}(M,t)$

5) Déterminer l'expression du vecteur de Poynting $\vec{P}(M,t)$. Quelle est la signification physique du flux de $\vec{P}$ à travers une surface S ouverte, arbitrairement orientée ?

II- Ondes électromagnétiques dans un milieu conducteur

1) On considère une onde du type $\vec{E}(M,t) = E_0 \exp i(\omega t - \underline{k}x) \vec{e}_y$, où $E_0 \in \mathbb{R}^+$, et $\underline{k} \in \mathbb{R}$ qui se propage dans un conducteur métallique où la densité volumique de charge $\rho(M,t)$ est nulle mais la densité volumique de courants $\vec{j}(M,t)$ est non nulle. On pose en notation complexe, la loi d'Ohm : $\vec{j}(M,t) = \underline{\gamma} \vec{E}(M,t)$ où $\underline{\gamma}$ est la conductivité électrique complexe du milieu, on suppose qu'elle ne dépend ni de l'espace ni du temps.

1-a Etablir l'équation de propagation du champ $\vec{E}(M,t)$

1-b Montrer que $\underline{k}$ et ω vérifient l'équation de dispersion suivante : $-\underline{k}^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = \mu_0 \gamma i \omega$

2) On se place dans l'approximation des basses fréquences qui consiste à négliger le terme en ω^2 dans la relation de dispersion (1-b) devant le terme en ω soit $\frac{\omega^2}{c^2} \ll \mu_0 \gamma \omega$.

2-a Réécrire l'équation de dispersion puis donner les valeurs possibles du vecteur d'onde $\underline{k}$. (Il sera commode de poser $\delta = \sqrt{2/\gamma \mu_0 \omega}$)

2-b Donner les deux expressions possibles du champ électrique (en notation complexe) dans le conducteur

2-c Dédire, à partir d'une interprétation physique des deux expressions possibles du champ électrique, la solution permise pour l'équation de dispersion et l'expression correspondante du champ électrique.

3) Déterminer l'expression complexe du champ magnétique dans le métal.

4) Déterminer l'expression du vecteur de Poynting $\vec{P}(M,t)$ puis l'expression de sa valeur moyenne $\langle \vec{P}(M,t) \rangle$. Commenter.

~~~~~

\*\*\*\* Bon courage à tous ! \*\*\*\*