

UNIVERSITÉ NAZI BONI (UNB)
UFR-ST-L3 Licence de Mathématiques-2016-17

Session de rattrapage: Calcul Différentiel (02 h 30 mn)

L'épreuve comporte trois exercices indépendants et se porte sur une page.

Compte sera tenu de la netteté de la copie.

Attention! Documents, calculatrices et matériels électroniques interdits.

Exercice 1

Soit E, F et G trois espaces vectoriels normés. On munit $E \times F$ de la norme

$$\|(x, y)\| = \sup(\|x\|, \|y\|).$$

1. Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes:

- (a) L'application B est continue.
- (b) L'application B est continue en $(0, 0)$.
- (c) Il existe une constante $M \geq 0$ telle que

$$\text{pour tous } (x, y) \in E \times F, \|B(x, y)\| \leq M\|x\|\|y\|.$$

2. On suppose que E et F sont de dimension finie. Montrer que toutes les applications bilinéaires sont continues.

Exercice 2

$\mathbb{R}^2$ étant muni de la norme $\|(x, y)\| = |x| + |y|$, on considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = \left(\operatorname{Arctang}\left(\frac{y}{2}\right) - x, \operatorname{Arctang}\left(\frac{x}{2}\right) + y \right).$$

- 1. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et déterminer sa matrice jacobienne.
- 2. En utilisant l'inégalité

$$|\operatorname{Arctang}(a) - \operatorname{Arctang}(b)| \leq |a - b|$$

déduire que f est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur son image $f(\mathbb{R}^2)$.

3. Montrer que

$$Df^{-1}[f(x, y)] = [Df(x, y)]^{-1}, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

puis déduire $[Df(2, 2)]^{-1}$.

4. (a) Montrer que pour tous $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\| \leq 2\|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)\|.$$

En déduire que la fonction $f^{-1} : f(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}^2$ est lipschitzienne de rapport 2.

- (b) Déduire que $f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$.

Indication: on pourra montrer que $f(\mathbb{R}^2)$ est un fermé.

Exercice 3

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)\exp(x^2 - y^2).$$

Déterminer les points critiques de f et donner leur nature.

Contrôle 1 de Calcul Différentiel (03 heures)

L'épreuve comporte trois exercices indépendants et se porte sur deux pages.

Compte sera tenu de la netteté de la copie.

Attention! Documents, calculatrices et matériels électroniques interdits.

Exercice 1: 7 points = $(0,5+1) + 1,5 + (1+0,5) + ((1+0,5)+1)$.

$\mathbb{R}^2$ étant muni de la norme $\|(x, y)\| = |x| + |y|$, on considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = \left(\operatorname{Arctang}\left(\frac{y}{2}\right) - x, \operatorname{Arctang}\left(\frac{x}{2}\right) + y \right).$$

1. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et déterminer sa matrice jacobienne. 0,5 + 1

2. En utilisant l'inégalité

$$|\operatorname{Arctang}(a) - \operatorname{Arctang}(b)| \leq |a - b|$$

déduire que f est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur son image $f(\mathbb{R}^2)$. 1,5

3. Montrer que

$$Df^{-1}[f(x, y)] = [Df(x, y)]^{-1}, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2. 1$$

puis déduire $[Df(2, 2)]^{-1}$. 0,5

4. (a) Montrer que pour tous $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\| \leq 2\|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)\|. 1$$

En déduire que la fonction $f^{-1} : f(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}^2$ est lipschitzienne de rapport 2. 0,5

(b) Déduire que $f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$.

Indication: on pourra montrer que $f(\mathbb{R}^2)$ est un fermé. 1

Exercice 2: 7 points = $1 + (1 + (1 + 1) + (1 + 1)) + 1$.

1. Rappeler la définition d'un C^1 -difféomorphisme.

2. On pose $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ et on considère $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$.

(a) Montrer que f est un C^1 -difféomorphisme local au voisinage de tout $X_0 = (x_0, y_0) \in U$ (c'est-à-dire qu'il existe un voisinage ouvert $U_0 \subset U$ de X_0 tel que f soit un C^1 -difféomorphisme de U_0 dans $f(U_0)$).

(b) Quelle formule générale relie la différentielle de f en $X_0 \in U$ à celle de la bijection réciproque associée? Expliciter cette relation à l'aide des matrices jacobienes.

(c) Énoncer le théorème d'inversion globale

Montrer que f n'est pas un C^1 -difféomorphisme global de U sur $f(U)$.

3. Montrer que si une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est un C^1 -difféomorphisme local au voisinage de tout réel alors c'est un C^1 -difféomorphisme global de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})$.

Solut 1 (voir TD) s'inspire de l'exo 13.

Solution 2 :

1) f est un difféomorphisme sur U ouvert si $f \in \mathcal{C}^1(U)$ est bijective de bijection réciproque $\mathcal{C}^1$ sur $f(U)$.

2) a) Soit $x_0 = (x_0, y_0) \in U$.

On a $f \in \mathcal{C}^1(U)$ (dérivées partielles continues) de jacobienne

$$J_f(x_0) = \begin{pmatrix} 2x_0 & -2y_0 \\ 2y_0 & 2x_0 \end{pmatrix}, \text{ inversible puisque } |J_f(x_0)| = 4(x_0^2 + y_0^2).$$

pour $x_0 \in U$. Donc $df(x_0) \in \text{Isom}(\mathbb{R}^2)$ et on peut donc appliquer le théo d'inversion locale qui donne le résultat demandé.

b) On note $g: x = f(U) \rightarrow U$ la biject² réciproque associée. On a $dg(f(x_0)) = (df(x_0))^{-1}$ ce qui

se traduit par $J_g(f(x_0)) = (J_f(x_0))^{-1}$ pour les jacobienes.

c) Puisque $f \in \mathcal{C}^1(U)$, on sait qu'elle définit un difféomorphisme global de U dans $f(U)$ si et seulement si elle est injective et que $df(x) \in \text{Isom}(\mathbb{R}^2)$ pour tout $x \in U$ (théor. inversion locale). Or $\forall x \neq 0, f(-x, -y) = f(x, y)$ ce qui montre que f n'est pas injective sur U et donc f n'est pas un difféomorphisme global sur U .

Exercice 3: 6 points = (0,5+1)+1,5+1+1+1.

Soit $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ l'application définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^4 + y^4 - (x - y)^2$.

1. Déterminer le gradient de f et en déduire l'expression de sa différentielle. 1
2. Déterminer les points critiques de f . 1,5
3. Étudier la nature du point critique $(1, -1)$. 1
4. Montrer que les résultats vus en cours ne permettent pas de conclure quant à la nature du point critique $(0, 0)$. 1
5. Montrer que $(0, 0)$ n'est pas un extremum local de f . 1

Solut°

1) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ $\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)(x, y) = (4x^3 - 2(x - y), 4y^3 + 2(x - y))$

$\forall (h, k) \in \mathbb{R}^2$, on a $df(x, y)(h, k) = \nabla f(x, y) \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = (4x^3 - 2(x - y))h + (4y^3 + 2(x - y))k$

2) Les points critiques de f sont les solutions de $df(x, y) = 0$ soit

$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \Rightarrow (x, y) \in \{(0, 0), (1, -1), (-1, 1)\}$

3) $H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 2 & 2 \\ 2 & 12y^2 - 2 \end{pmatrix}$ et $H_f(1, -1) = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$ qui est

définie positive et donc il s'agit d'un minimum

4) $H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$ déterminant vaut 0 ce qui montre que $H_f(0, 0)$ n'est pas définie et on ne peut pas conclure directement

5) Puisque $f(0, 0) = 0$ et que $f(x, x) = 2x^4 > 0$ et $f(x, -x) = 2x^2(x^2 - 2) < 0$, on obtient que $\forall x \in]-\sqrt{2}; \sqrt{2}[$ non nul, $f(x, -x) < f(0, 0) < f(x, x)$ et donc f n'est pas un extremum local.

Deute solution 2

3) Si f est un difféo local au voisinage de tout point de $\mathbb{R}$, alors par le théo d'univ globale, ce sera un difféomorphisme global dès lors qu'elle est surjective. Or c'est nécessairement le cas puisque s'il existe $a < b$ réels tels que $f(a) = f(b)$ alors par le théo de Rolle, on aurait $\exists c \in]a, b[\mid f'(c) = 0$ et f ne serait donc pas un difféomorphisme local au voisinage de c .