

1.	Calcul des probabilités	1
1.1.	Dénombrement	1
1.2.	Calcul des probabilités	4
2.	Lois de probabilité discrètes	8
2.1.	Variables aléatoires (v.a)	8
2.2.	Éléments caractéristiques d'une v.a discrète	9
2.3.	Opérations sur les variables aléatoires discrètes	10
2.4.	Quelques lois théoriques discrètes	10
3.	Lois de probabilité continues	14
3.1.	Généralités sur les v.a aléatoires continues	14
3.2.	Éléments caractéristiques	14
3.3.	Quelques inégalités de probabilité	15
3.4.	Quelques lois théoriques continues	15

1.1. Dénombrement

1.1.1. Tirages successifs avec remise : listes

Problème : Soient n et p deux entiers naturels non nuls. Dans une population d'effectif n , on effectue l'expérience aléatoire qui consiste à extraire successivement, avec remise, p individus. On note que le même individu peut être choisi plusieurs fois et on peut donc avoir $p > n$.

Définition 1.1. Les résultats de ces tirages successifs rangés dans l'ordre de leur obtention constituent une liste à p éléments ou p -liste.

Proposition 1.1. Le nombre de listes à p éléments est n^p .

Preuve. En effet à chaque tirage le nombre d'issues possibles est n et puisqu'on effectue p tirages successifs le nombre de p -listes est bien n^p . $\square$

Exemple 1.1. Une urne contient 8 boules numérotées de 1 à 8. On tire successivement 5 boules, en notant après chaque tirage le numéro obtenu puis en remettant la boule tirée dans l'urne avant le tirage suivant. Le résultat obtenu par exemple 27244 est une 5-liste. L'ordre intervient et les éléments sont distincts ou non. Le nombre total de 5-listes dans un ensemble à 8 éléments est $8^5=32768$.

1.1.2. Tirages successifs sans remise : arrangements

Problème : Soient n et p deux entiers non nuls. Dans une population d'effectif n , on effectue l'expérience aléatoire qui consiste à extraire successivement et sans remise p individus. On note que le même individu ne peut pas être choisi plusieurs fois et que $p \leq n$. Ces tirages successifs sans remise sont dits tirages exhaustifs.

Définition 1.2. Les résultats de ces tirages successifs rangés dans l'ordre de leur obtention constituent un arrangement de p éléments distincts choisis parmi n .

Proposition 1.2. Le nombre d'arrangement de p éléments choisis parmi n est noté A_n^p et on a :

$$(1.1) \quad A_n^p = n \times (n-1) \times \dots \times (n-p+1).$$

Preuve. En effet le nombre d'issues possibles pour le premier tirage est n , il n'est plus que de $(n-1)$ pour le deuxième, $(n-2)$ pour le troisième et ainsi de suite jusqu'au $p^{\text{ème}}$ tirage où le nombre de possibilités est $n - (p-1) = n - p + 1$. D'où on a bien $A_n^p = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-p+1)$. $\square$

Exemple 1.2. On reprend l'urne de l'exemple 1.1, un exemple d'arrangement de 5 éléments parmi 8 est 25347. L'ordre intervient et tous éléments sont distincts. Le nombre total d'arrangement de 5 éléments dans un ensemble à 8 éléments est $A_8^5 = 6720$.

Définition 1.3. Soit n un entier naturel non nul. On appelle factoriel n le nombre entier noté $n!$ et défini par

$$(1.2) \quad n! = 1 \times 2 \times \dots \times (n-1) \times n.$$

Remarque 1.1. Par convention on pose $0! = 1$.

Le nombre de d'arrangement de p éléments choisis parmi n est :

$$(1.3) \quad A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

Définition 1.4. Un arrangement de n éléments choisis parmi n est une permutation. Le nombre de permutation dans un ensemble à n éléments est $n!$.

1.1.3. Tirages simultanés : combinaisons

Problème : Soient n et p deux entiers naturels non nuls. Dans une population d'effectif n , on effectue l'expérience aléatoire qui consiste à extraire simultanément et donc sans remise p individus. On note que le même individu ne peut pas être choisi plusieurs fois et que $p \leq n$.

Définition 1.5. Le résultat de ce tirage simultané est une combinaison de p éléments choisis parmi n . La notion d'ordre n'intervient plus et une telle combinaison est un ensemble à p éléments distincts.

Proposition 1.3. Le nombre de combinaisons de p éléments choisis parmi n est

$$(1.4) \quad C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Preuve. En effet chaque combinaison à p éléments engendre $p!$ arrangements à p éléments donc le nombre de combinaisons à p éléments choisis parmi n est :

$$C_n^p = \frac{1}{p!} A_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

□

1.1.4. Propriétés des coefficients C_n^p

Proposition 1.4 (Symétrie des coefficients). Soit n un entier naturel non nul et p un entier naturel inférieur à n . Alors on a :

$$(1.5) \quad C_n^p = C_n^{n-p}.$$

Preuve. En effet soit E un ensemble de cardinal n . A toute partie F de E de cardinal p on peut associer bijectivement une partie à $(n-p)$ éléments à savoir son complémentaire dans E . Il y a donc le même nombre de parties à p éléments que de parties à $(n-p)$ éléments c'est-à-dire : $C_n^p = C_n^{n-p}$. □

Proposition 1.5 (Relation de Pascal). Soit n un entier naturel non nul et p un entier naturel inférieur à n . Alors on a :

$$(1.6) \quad C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p.$$

Preuve. En effet soit n et p deux entiers naturels non nuls tels que $n-1 \geq p$ et E un ensemble de cardinal n . Soit C l'ensemble des combinaisons à p éléments de E , alors $\text{Card}(C) = C_n^p$. Soit a un élément fixé de E . Considérons la partition de E en deux sous ensembles :

- L'ensemble A des éléments de C contenant a .
- L'ensemble D des éléments de C ne contenant pas a .
- Une combinaison de A contient a et $(p-1)$ autres éléments de E à choisir parmi les $(n-1)$ qui restent. Donc $\text{Card}(A) = C_{n-1}^{p-1}$.
- Une combinaison de D contient p éléments de E à choisir parmi $(n-1)$ éléments car a ne peut pas être choisi. Donc $\text{Card}(D) = C_{n-1}^p$.
- Comme $C = A \cup D$ avec $A \cap D = \emptyset$ alors $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$.

□

Exercice 1.1. La formule (1.6) permette de construire un tableau appelé triangle de Pascal. En utilisant la formule (1.6), compléter le tableau suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 C_0^0 & & & & & & & & & 1 \\
 C_1^0 & C_1^1 & & & & & & & & 1 & 1 \\
 C_2^0 & C_2^1 & C_2^2 & & & & & & & 1 & 2 & 1 \\
 C_3^0 & C_3^1 & C_3^2 & C_3^3 & & & & & & 1 & 3 & 3 & 1 \\
 C_4^0 & C_4^1 & C_4^2 & C_4^3 & C_4^4 & & & & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1
 \end{array}$$

Proposition 1.6. Soient a et b deux nombres réels et n un entier naturel non nul alors :

$$(1.7) \quad (a+b)^n = \sum_{p=0}^n C_n^p a^p b^{n-p} = \sum_{p=0}^n C_n^p b^p a^{n-p}.$$

Proposition 1.7 (Ensemble des parties d'un ensemble). Soit E un ensemble de cardinal n alors l'ensemble des parties de E , noté $\mathcal{P}(E)$ à 2^n éléments.

Exercice 1.2. Démontrer la formule de Newton et vérifier que $\text{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$ où n est le cardinal de E .

Exercice 1.3.

- 1) Montrer que pour tout entier n et p tels que $1 \leq p \leq n$ on a : $pC_n^p = nC_{n-1}^{p-1}$.
- 2) Montrer que pour tout entier n et p tels que $2 \leq p \leq n$ on a : $p(p-1)C_n^p = n(n-1)C_{n-2}^{p-2}$.

Exercice 1.4 (Relation de Vandermonde). Soient a, b et p des entiers naturels tels que : $0 \leq p \leq a+b$. Montrer que

$$(1.8) \quad C_{a+b}^p = \sum_{k=0}^p C_a^k C_b^{p-k}.$$

1.1.5. Récapitulatif

Tirage de un échantillon de p éléments dans une population de n individus où p et n sont deux entiers naturels.

Méthode de tirage	Conditions	Nombre de tirages
Tirage successif avec remise : listes	n et p non nuls	n^p
Tirage successif sans remise : arrangement	$0 \leq p \leq n$	A_n^p
Tirage simultané	$0 \leq p \leq n$	C_n^p

1.2. Calcul des probabilités

1.2.1. Espaces probabilisés

Soient (Ω) un ensemble (fini ou non, dénombrable ou non), appelé univers et $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω . Soit Σ une partie de $\mathcal{P}(\Omega)$.

Définition 1.6. Σ est appelée tribu ou espace des évènements si elle vérifie les axiomes suivants :

- (1) Ω est un élément de Σ : $\Omega \in \Sigma$;
- (2) Σ est stable par réunion dénombrable : si $(A_i)_{i \in I} \subset \Sigma$ alors $\bigcup_{i \in I} A_i \in \Sigma$;
- (3) Σ est stable par complémentarité : si $A \in \Sigma$ alors $\bar{A} := \{\omega \in \Omega : \omega \notin A\} \in \Sigma$.

Les éléments de Σ sont appelés des évènements.

Définition 1.7. Le couple (Ω, Σ) est appelé espace probabilisable.

Exemple 1.3. Les couples $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ et $(\Omega, \{\Omega, \emptyset\})$ sont des exemples d'espaces probabilisables.

Exercice 1.5. Montrer que si A et B sont des évènements alors $A \cap B$, $A \cup B$ et $A \Delta B$ sont aussi des évènements.

Définition 1.8. Un système complet d'évènements (ou une partition de Ω) est une partie $\{A_1; A_2; \dots; A_n\}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ formée d'évènements deux à deux incompatibles et dont la réunion est l'univers Ω :

$$(1.9) \quad \forall i, j \in I : i \neq j, \text{ on a } A_i \cap A_j = \emptyset \quad \text{et} \quad \bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega.$$

Définition 1.9. On appelle probabilité sur (Ω, Σ) toute fonction $P : \Sigma \rightarrow [0; 1]$ telle que :

- (1) $P(\Omega) = 1$;
- (2) $A_1; A_2; \dots; A_n$ est une famille dénombrable d'évènements deux à deux incompatibles de Σ alors

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i).$$

Remarque 1.2. En particulier si A et B sont deux évènements incompatibles alors

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Définition 1.10. Le triplet $(\Omega; \Sigma; P)$ est appelé espace probabilisé.

Propriété 1.1. Pour tout espace probabilisé $(\Omega; \Sigma; P)$, on a :

- (1) Si A et $\bar{A}$ sont deux évènements contraires alors $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$;
- (2) $P(\emptyset) = 0$;
- (3) Pour tous évènements A et B ; $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$;
- (4) Pour tous évènements A et B tel que $A \subset B$ on a : $P(A) \leq P(B)$;
- (5) Pour tous évènements A et B on a : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Proposition 1.8. Pour toute suite de n évènements $(A_1; A_2; \dots; A_n)$ on a la formule suivante appelée formule de Poincaré :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n).$$

Exercice 1.6. Écrire la formule de Henri Poincaré pour les évènements A ; B et C .

1.2.2. Probabilités conditionnelles

Définition 1.11. Soient $(\Omega; \Sigma; P)$ un espace probabilisé et A un évènement de probabilité non nulle. On appelle probabilité conditionnelle relative à A ou sachant A , la fonction $P_A : \Sigma \rightarrow [0; 1]$ telle que pour tout évènement quelconque B de Σ , on ait :

$$(1.10) \quad P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

On note aussi cette probabilité $P(B/A)$.

Remarque 1.3. La probabilité conditionnelle de A sachant B représente la probabilité que l'évènement A se réalise lorsqu'on sait déjà que l'évènement B est réalisé.

Proposition 1.9. Soit $(A_i)_{i \in I}$ un système complet d'évènements de probabilités non nulles. Alors pour tout évènement B on a :

► **Formule des probabilités totales :**

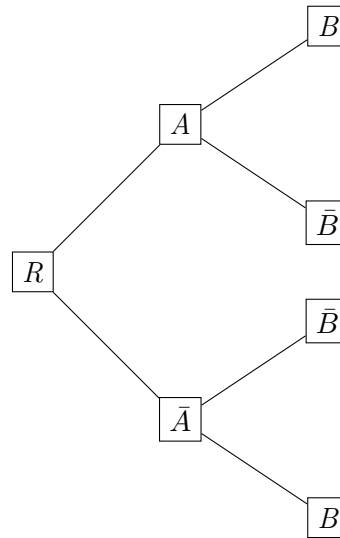
$$P(B) = \sum_{i \in I} P(A_i \cap B) = \sum_{i \in I} P(A_i) \times P_{A_i}(B);$$

► **Formule de Bayes :**

$$\forall i \in I, \quad P_B(A_i) = \frac{P(A_i) \times P_{A_i}(B)}{\sum_{i \in I} P(A_i) \times P_{A_i}(B)}.$$

Preuve. En exercice. □

Remarque 1.4 (Arbre de probabilité conditionnelle).



Exercice 1.7. Dans une région d'un pays, 15% de la population est atteinte par un certain virus. On met en place un test de dépistage. On tire au hasard un individu dans la région. Tous les individus ont la même probabilité d'être choisis. On note

- A l'évènement « l'individu est sain »,
- B l'évènement « l'individu est contaminé »,
- C l'évènement « l'individu a un test négatif »,
- D l'évènement « l'individu a un test positif ».

La probabilité qu'un test soit positif sachant que le sujet est sain est 0,004. La probabilité qu'un test soit négatif sachant que le sujet est contaminé est 0,024.

- 1) Dédurre de l'énoncé, $P(A)$, $P(B)$, $P_A(D)$ et $P_B(C)$.
- 2) Calculer la probabilité que le test soit positif et l'individu sain.
- 3) Calculer la probabilité que le test soit négatif et l'individu contaminé.
- 4) En déduire la probabilité que le test soit erroné.

1.2.3. Évènements indépendants

Définition 1.12. Deux évènements A et B sont dits indépendants pour la probabilité P si et seulement si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Remarque 1.5. Si les évènements A et B sont indépendants pour la probabilité P alors on a $P(B/A) = P(B)$.

Définition 1.13.

- $(A_i)_{i \in I}$ est une famille dénombrable d'évènements deux à deux indépendants pour la probabilité P , si et seulement si : $\forall (i; j) \in I^2$ où $i \neq j$; on a $P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \times P(A_j)$.
- $(A_i)_{i \in I}$ est une famille dénombrable d'évènements deux à deux indépendants pour la probabilité P , si et seulement si pour toute sous-famille finie K d'indices de I on a

$$P\left(\bigcap_{i \in K} A_i\right) = \prod_{i \in K} P(A_i).$$

Exercice 1.8.

- 1) Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- Les évènements A et B sont indépendants,
- Les évènements A et $\overline{B}$ sont indépendants,
- Les évènements $\overline{A}$ et B sont indépendants,
- Les évènements $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

- 2) Les évènements $A_1; A_2; \dots; A_n$ sont mutuellement indépendants si et seulement si :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n) \text{ avec } B_i = A_i \text{ ou } B_i = \overline{A_i}.$$

Exercice 1.9. On considère deux évènements A et B d'un espace probabilisé (Ω, Σ, P) tels que $P(A) = 0,72$ et $P(B) = 0,19$. Calculer $P(A \cup B)$ dans chacun des cas suivants :

- a) A et B sont incompatibles.
- b) A et B sont indépendants.
- c) $P(A \cap B) = 0,07$.

1.2.4. Notion d'équiprobabilité

Soit l'univers $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$. On dira qu'il y a équiprobabilité si

$$(1.11) \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{n}$$

c'est-à-dire que chacun des résultats possibles de l'expérience a la même probabilité de se réaliser. Dans le cas d'équiprobabilité des évènements élémentaires, si A est un évènement quelconque, alors on a :

$$(1.12) \quad P(A) = \frac{\text{nombre de cas favorable}}{\text{nombre de cas possible}}.$$

Exercice 1.10. On dispose d'une pièce équilibrée et de deux urnes. U_1 contient une boule blanche et cinq boules noires, U_2 contient trois boules blanches et trois boules noires. On lance la pièce, si on obtient face, on tire une boule dans l'urne U_1 , sinon on tire une boule dans U_2 . Calculer la probabilité des évènements, suivants :

- A : « on obtient face et on tire une boule blanche ».
- C : « on obtient une boule blanche ».

Idée : présenter l'expérience par un arbre de probabilité

CHAPITRE 2

LOIS DE PROBABILITÉ DISCRÈTES

2.1. Variables aléatoires (v.a)

Soit (Ω, Σ, P) un espace probabilisé.

Définition 2.1. On appelle v.a réelle (ou aléa numérique) toute application $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ telle que l'image réciproque $X^{-1}(I) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in I\}$ de tout intervalle I de $\mathbb{R}$ soit un événement de Σ .

Exemple 2.1. On définit une v.a en associant à chaque résultat d'une épreuve un gain financier (positif ou négatif).

L'ensemble des valeurs prises par X est notée $X(\Omega)$. Trois cas peuvent se présenter :

- ♣ $X(\Omega) = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ ensemble fini de nombres. On dit que X est une v.a discrète finie.
- ♣ $X(\Omega) = \{x_1; x_2; \dots; x_n; \dots\}$ ensemble infini dénombrable de nombres. On dit que X est une v.a discrète infinie.
- ♣ $X(\Omega)$ est un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$. On ne peut plus « énumérer » les valeurs prises. On dit que X est une v.a. continue.

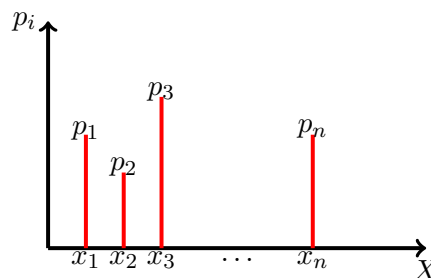
Dans le cas où $\Omega = \{\omega_1; \omega_2; \dots\}$ et où X est une v.a discrète on peut définir une probabilité sur $X(\Omega)$ de la manière suivante.

Définition 2.2. On appelle loi de probabilité de X l'application $P_X : X(\Omega) \rightarrow [0; 1]$ définie par

$$P_X(x_i) = P(X = x_i) = P(\{\omega_j \in \Omega \mid X(\omega_j) = x_i\}).$$

On notera dans la suite P_X par P . Notons que $P(X = x_i) = p_i$ représente en fait la probabilité d'apparition de l'événement antécédent $\{\omega_j \in \Omega \mid X(\omega_j) = x_i\}$ par X du réel x_i .

L'ensemble des valeurs p_i vérifie $\sum_i p_i = 1$ et peut être représenté par un « diagramme en bâton ».

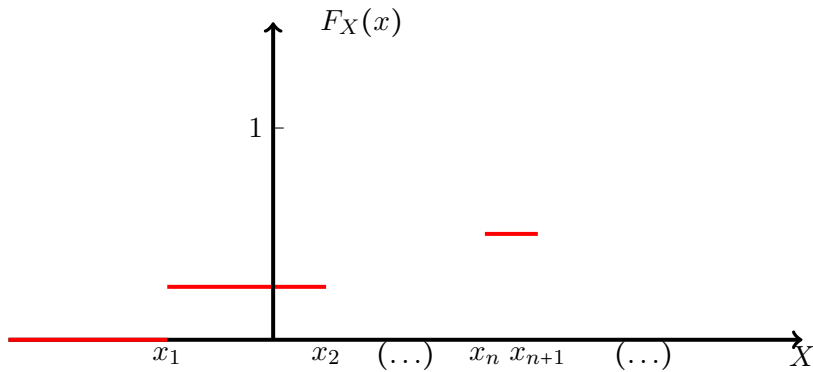


La donnée de $(x_i; p_i)_i$ définit la loi de probabilité de la v.a X . Dans le cas où $X(\Omega)$ est fini, on présente généralement la loi de probabilité de la v.a X par le tableau suivant :

$X : x_i$	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Définition 2.3. On appelle « fonction de répartition » de X , la fonction $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0; 1]$ tel que pour tout réel x , $F_X(x) = P(X < x)$. On a alors $F_X(x) = \sum_{x_i < x} p_i$ (somme des p_i tels que $x_i < x$).

La fonction de répartition est définie sur $\mathbb{R}$, constante par intervalle, non décroissante continue à gauche et vérifie : $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$.



2.2. Éléments caractéristiques d'une v.a discrète

Définition 2.4. L'espérance mathématique (ou moyenne) résume la v.a X en une valeur :

$$E(X) = \sum_i p_i x_i.$$

Définition 2.5. La variance résume l'écart entre les valeurs de X et $E(X)$:

$$V(X) = \sum_i p_i (x_i - E(X))^2 = \sum_i p_i x_i^2 - [E(X)]^2$$

et l'écart type : $\sigma_X = \sqrt{V(X)}$.

Remarque 2.1. Notons que σ_X et $V(X)$ sont toujours positifs.

Définition 2.6. On dit que X est :

- centrée si $E(X) = 0$,
- réduite si $V(X) = 1$,
- centrée et réduite si $E(X) = 0$ et $V(X) = 1$.

Exercice 2.1. Une urne contient 10 boules. Sur chacune d'elle on a inscrit un nombre suivant le tableau ci-dessous :

Nombre inscrit	5	6	10	11	12	13	14
Nombre de boule	1	2	1	3	1	1	1

Un joueur mise 10 euros, tire une boule au hasard et reçoit la somme (en euros) inscrite sur la boule. Toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées.

1) Le joueur joue une fois. On note p_1 la probabilité qu'il perd de l'argent et p_2 la probabilité qu'il reçoit plus de 10 euros. Donner p_1 et p_2 .

- 2) Soit X la variable aléatoire, qui à chaque tirage, fait correspondre le « gain » du joueur.
- 2.1) Quelles sont les valeurs prises par la v.a X ?
 - 2.2) Déterminer la loi de probabilité de X .
 - 2.3) Calculer l'espérance mathématique de X .
 - 2.4) Déterminer la variance et l'écart type de X .
 - 2.5) Construire dans un repère orthogonal la courbe de la fonction de répartition de X .

2.3. Opérations sur les variables aléatoires discrètes

Soient $X = (x_i; p_i)_i$ et $Y = (y_j; q_j)_j$ deux v.a discrètes.

Définition 2.7. On appelle covariance du couple de v.a (X, Y) , le nombre (s'il existe) noté et définit par :

$$Cov(X, Y) = \sum_{i,j} p_{ij}(x_i - E(X))(y_j - E(Y)) = \sum_{i,j} p_{ij}x_i y_j - E(X)E(Y)$$

où $p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$ est la loi conjointe du couple (X, Y) .

- La loi marginale de X est définie par :

$$p_i = P(X = x_i) = \sum_j P(X = x_i, Y = y_j).$$

- La loi marginale de Y est définie par :

$$q_j = P(Y = y_j) = \sum_i P(X = x_i, Y = y_j).$$

- Le coefficient de corrélation entre X et Y est :

$$R(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}.$$

- Les variables X et Y sont dit indépendantes si et seulement si pour tout i et j , on a $p_{ij} = p_i q_j$.

Propriété 2.1. Soient X, Y deux v.a, $a; b, a', b'$ des réels. Alors on a :

- (1) $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$ (L'espérance est une application linéaire) ;
- (2) $V(aX + b) = a^2 V(X)$;
- (3) $\sigma(aX + b) = |a| \sigma(X)$;
- (4) $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2Cov(X, Y)$;
- (5) $Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$ (utile pour le calcul) ;
- (6) $Cov(aX + b, a'Y + b') = aa' Cov(X, Y)$;
- (7) $R(aX + b, a'Y + b') = \frac{aa'}{|aa'|} R(X, Y)$ avec a et a' non nuls ;
- (8) $-1 \leq R(X, Y) \leq 1$;
- (9) Si X et Y sont indépendantes alors on a :
 - (a) $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$;
 - (b) $E(XY) = E(X)E(Y)$ et dans ce cas $Cov(X, Y) = 0$.

2.4. Quelques lois théoriques discrètes

Les Loïs qui suivent sont les plus fréquemment rencontrées dans les problèmes pratiques.

2.4.1. Loi de Bernoulli : $\mathcal{B}(p)$

a. **Schéma** : Expérience aléatoire à deux issues, l'une de valeur 1 avec probabilité p et l'autre de valeur 0 avec probabilité $q = 1 - p$.

La v.a $X =$ « résultat ou numéro tiré » suit une loi de Bernoulli de paramètre p . On note $X \sim \mathcal{B}(p)$.

b. **Propriétés** :

- (1) Les valeurs possibles de X : $X(\Omega) = \{0; 1\}$;
- (2) Loi de probabilité de X : $P(X = 0) = q$ et $P(X = 1) = p$;
- (3) Les paramètres statistiques : $E(X) = p$ et $V(X) = pq$

2.4.2. Loi uniforme : $\mathcal{U}(n)$

a. **Schéma** : Triage au sort d'un numéro entre 1 et n .

b. **Propriétés** :

- (1) Les valeurs possibles de X : $X(\Omega) = \{1; 2; \dots; n\}$;
- (2) Loi de probabilité : pour tout $k = 1; 2; \dots; n$ on a : $P(X = k) = \frac{1}{n}$;
- (3) Les paramètres statistiques : $E(X) = \frac{n+1}{2}$ et $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$

2.4.3. La loi géométrique : $\mathcal{G}(p)$

a. **Schéma** : Soit A un événement attaché à une expérience aléatoire de probabilité p (on posera $q = 1 - p$ la probabilité de l'événement contraire de A). L'expérience est répétée de façons identiques et indépendantes et l'on considère la variable aléatoire X égale au nombre d'expériences nécessaires pour obtenir pour la première fois la réalisation de l'événement A . On dit que X suit une loi géométrique de paramètre p et on note que $X \sim \mathcal{G}(p)$.

b. **Propriétés** :

- (1) Valeurs prise par X : $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$;
- (2) Loi de probabilité de X : pour tout naturel non nul n on a : $P(X = n) = q^{n-1}p$;
- (3) Paramètres statistiques : $E(X) = \frac{1}{p}$ et $V(X) = \frac{q}{p^2}$.

2.4.4. La loi hypergéométrique : $\mathcal{H}(N, B, n)$

a. **Schéma** : Dans une urne se trouvent N boules dont B boules blanches. On tire d'un coup n boules. Le nombre X de boules blanches dans ce tirage est une v.a suivant une loi hypergéométrique qui dépend des trois paramètres N , B et n . On note $X \sim \mathcal{H}(N, B, n)$.

b. **Propriétés** :

- (1) Valeurs prise par X : $X(\Omega) = \{0; 1; \dots; n\}$ si $n \leq B$;
- (2) Loi de probabilité de X : pour tout $k = 0; 1; 2; \dots; n$ on a : $P(X = k) = \frac{C_B^k \times C_{N-B}^{n-k}}{C_N^n}$;
- (3) Paramètres statistiques : $E(X) = n \frac{B}{N}$ et $V(X) = n \frac{B}{N} \left(1 - \frac{B}{N}\right) \left(\frac{N-n}{N-1}\right)$.

2.4.5. Loi binomiale : $\mathcal{B}(n; p)$

a. **schéma** : Soit A un événement attaché à une expérience de probabilité p ; on posera $q = 1 - p$ la probabilité de l'événement contraire de A . L'expérience est répétée n fois de façons identiques et indépendantes et l'on considère la v.a X égale au nombre de réalisation de l'événement A . On dit que X suit une loi binomiale de paramètres n et p et on note : $X \sim \mathcal{B}(n; p)$.

b. **Propriétés** :

- (1) Valeurs prise par X : $X(\Omega) = \{0; 1; \dots; n\}$;
- (2) Loi de probabilité de X : Pour tout $k = 0; 1; 2; \dots; n$ on a : $P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$;
- (3) Paramètres statistiques : $E(X) = np$ et $V(X) = npq$.

2.4.6. Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$

a. **Schéma** : c'est le processus de Poisson :

- un événement aléatoire peut se produire dans un intervalle de temps Δt (exemple : arrivée d'une ou plusieurs personnes à un guichet, file d'attente, appels téléphoniques dans un standard, ...) ;
- dans cet intervalle, il se produit avec la probabilité $\alpha \Delta t$;
- ces événements se produisent relativement régulièrement et sont indépendants les uns des autres.

Alors la v.a X = « nombre d'événements se produisant durant l'intervalle de temps $[a, b]$ » est une v.a suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda = (b - a)\alpha$ et on note : $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

b. **Propriétés** :

- (1) Valeurs prise par X : $X(\Omega) = \mathbb{N}$;
- (2) Loi de probabilité de X : pour tout naturel k on a : $p_k = P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$;
- (3) Paramètres statistiques : $E(X) = \lambda = V(X)$.

Remarque 2.2. Pour tout entier naturel k on a : $\frac{p_{k+1}}{p_k} = \frac{\lambda}{k+1}$ et $p_0 = e^{-\lambda}$.

c. **Somme de deux Loïs de Poissons** : Si $X_1 \sim \mathcal{P}(\lambda_1)$, $X_2 \sim \mathcal{P}(\lambda_2)$ et X_1 et X_2 sont indépendantes alors $X_1 + X_2 \sim \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

d. **La loi de Poisson comme loi limite de la loi Binomiale** Soit $X \sim \mathcal{B}(n; p)$. Supposons que n et p sont liés et $\lim_{n \rightarrow +\infty} np(n) = \lambda$. On démontre alors que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} C_n^k p^k q^{n-k} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

C'est-à-dire la loi de Poisson est une approximation de la loi binomiale et on peut écrire : $X \sim \mathcal{P}(np)$.

Conditions d'approximation : Si ($n \geq 30$, $p \leq 0,1$ et $np < 15$) alors $\mathcal{B}(n; p) \cong \mathcal{P}(\lambda = np)$.

Remarque 2.3. Cette loi de Poisson est tablée.

Exercice 2.2. Une usine chimique, située près de la station balnéaire les EAUX CLAIRES, rejette en mer des déchets contenant des produits toxiques. Les rejets quotidiens sont indépendants les uns des autres. Les contrôles sont effectués chaque soir à 23 heures et ont valeur de norme pour le lendemain. La baignade est autorisée les jours où la masse de déchets rejetés est inférieure à 1650 kg.

Un grand nombre de contrôles journaliers a permis d'établir que la probabilité, qu'un jour donné, la baignade soit autorisée est 0,94.

1) Sur une période de quinze jours consécutifs, on note Y la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de jours où la baignade est interdite.

1.1) Quelle est la loi de probabilité de Y ? Préciser ces paramètres.

1.2) Une famille vient passer quinze jours consécutifs à la station balnéaire les EAUX CLAIRES.

Calculer la probabilité que, durant son séjour, la baignade ne soit jamais interdite.

2) On note Z la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de jours où la baignade est interdite durant les mois de juillet et août, c'est-à-dire pendant 62 jours.

2.1) Quelle est la loi de probabilité de Z ? Préciser ces paramètres.

2.2) Justifier l'approximation de la loi de Z par une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Préciser λ .

2.3) Calculer alors la probabilité que durant la saison juillet-août la baignade soit interdite plus de trois jours.

CHAPITRE 3

LOIS DE PROBABILITÉ CONTINUES

Nous avons vu dans le chapitre précédent que les valeurs prise par une v.a réelle pouvaient être un intervalle ou une réunion d'intervalle. Nous en étudierons une classe particulière vérifiant la condition suivante : pour tout réel a $P(X = a) = 0$.

3.1. Généralités sur les v.a aléatoires continues

Définition 3.1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction vérifiant les trois conditions suivantes :

- (1) f est intégrable,
- (2) f est positive sur $\mathbb{R}$,
- (3) $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

Alors f est appelée densité de probabilité associée à une v.a X dite absolument continue.

Définition 3.2. Soit X une v.a continue de densité de probabilité f . On appelle fonction de répartition de X , la fonction $F_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$(3.1) \quad F_X(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Remarque 3.1. Si F_X est dérivable (sauf peut être en quelques points) alors sa dérivée est f .

Notons que les propriétés de F_X sont les mêmes que dans le cas discret néanmoins dans le cas continue F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et partout où F_X est dérivable on a $F'_X = f$.

3.2. Éléments caractéristiques

Ces notions généralisent celles déjà vues dans le cas discret.

Définition 3.3. On appelle espérance mathématique d'une v.a continue X de densité de probabilité f , le nombre $E(X)$ (s'il existe) défini par

$$(3.2) \quad E(X) = \int_{\mathbb{R}} xf(x)dx \quad (\text{sous réserve de convergence de l'intégrale}).$$

Définition 3.4. On appelle variance d'une v.a continue X de densité de probabilité f , le nombre $V(X)$ (s'il existe) défini par

$$(3.3) \quad V(X) = \int_{\mathbb{R}} (x - E(x))^2 f(x)dx = \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)dx - [E(x)]^2 \quad (\text{sous réserve de convergence de l'intégrale}).$$

Définition 3.5. Soit k un entier naturel non nul.

- (1) On appelle moment centré d'ordre k le nombre s'il existe

$$M_k(X) = \int_{\mathbb{R}} (x - E(X))^k f(x) dx.$$

- (2) On appelle moment d'ordre k le nombre s'il existe

$$\mu_k(X) = \int_{\mathbb{R}} x^k f(x) dx.$$

Remarque 3.2. En particulier, $\mu_1(X) = E(X)$, $\mu_k(X) = E(X^k)$, $M_2(X) = V(X)$ et $M_1(X) = 0$.

Exercice 3.1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \notin [-1; 1] \\ t + 1 & \text{si } t \in [-1; 0] \\ -t + 1 & \text{si } t \in [0; 1]. \end{cases}$$

- 1) Démontrer que f est une densité de probabilité.
- 2) Soit X la v.a dont f est la densité de probabilité.
 - 2.1) Déterminer la fonction de répartition de X .
 - 2.2) Calculer l'espérance mathématique et la variance de X .
 - 2.3) Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer la probabilité de l'évènement « $|X| \leq a$ ».

3.3. Quelques inégalités de probabilité

Théorème 3.1 (Inégalité de Markov). Soient X une variable aléatoire positive (discrète ou continue) d'espérance $E(X)$ et a un réel strictement positif. Alors on a :

$$(Markov) \quad P(X > a) \leq \frac{E(X)}{a}.$$

Preuve. En exercice. □

Théorème 3.2 (Inégalité de Bienaymé Tchebychev). Soit X une variable aléatoire discrète ou continue d'espérance $E(X)$ et de variance $V(X)$. Alors pour tout réel strictement positif a , on a :

$$(Bienaymé Tchebychev) \quad P(|X - E(X)| > a) \leq \frac{V(X)}{a^2}.$$

Preuve. En exercice. □

Théorème 3.3 (Loi faible des grands nombres). Soient $X_1, X_2, \dots, X_n$, n v.a indépendantes deux à deux et de même loi de probabilité et tel que $E(X_1) = E(X_2) = \dots = E(X_n) = p$. On pose $Y_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$. Alors pour tout réel a strictement positif on a :

$$(3.4) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P(|Y_n - p| > a) = 0.$$

Preuve. En exercice □

3.4. Quelques lois théoriques continues

3.4.1. Loi uniforme

Soient a et b deux réels tels que $a < b$. On appelle v.a uniforme sur l'intervalle $[a, b]$ une v.a X absolument continue ayant pour densité de probabilité la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$(3.5) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{si } x \notin [a, b]. \end{cases}$$

On note dans ce cas, $X \rightsquigarrow \mathcal{U}([a, b])$. La fonction de répartition d'une telle loi est donnée par

$$(3.6) \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 1 & \text{si } x \geq b. \end{cases}$$

Les paramètres statistiques d'une v.a $X \rightsquigarrow \mathcal{U}([a, b])$:

$$(3.7) \quad E(X) = \frac{a+b}{2}, \quad V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}, \quad \sigma_X = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

3.4.2. Loi exponentielle

Soit α un réel strictement positif. On appelle variable exponentielle de paramètre α , une v.a X absolument continue dont la densité de probabilité est définie par la fonction :

$$(3.8) \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \alpha e^{-\alpha x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

On note dans ce cas, $X \rightsquigarrow \mathcal{E}(\alpha)$. La fonction de répartition d'une telle loi est donnée par

$$(3.9) \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\alpha x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Les paramètres statistiques d'une v.a $X \rightsquigarrow \mathcal{E}(\alpha)$:

$$(3.10) \quad E(X) = \frac{1}{\alpha}, \quad V(X) = \frac{1}{\alpha^2}, \quad \sigma_X = \frac{1}{\alpha}.$$

3.4.3. Loi normale ou de Gauss –Laplace

Comme son nom l'indique, cette loi a été introduite pour rendre compte des fluctuations «normales» d'une grandeur physique. On s'attend à avoir :

- la plupart des valeurs centrées autour d'une moyenne m ,
- une dispersion symétrique autour de m ,
- de faibles chances d'être loin de m , d'autant plus faible qu'on s'en éloigne.

Soit σ un réel strictement positif. On dit que la variable aléatoire X suit une loi normale de paramètres m et σ si sa fonction densité de probabilité $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par

$$(3.11) \quad f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-m)^2}{\sigma^2}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

On note $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(m, \sigma)$. La fonction de répartition d'une telle loi est définie par

$$(3.12) \quad F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(t-m)^2}{\sigma^2}} dt, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Les paramètres statistique d'une v.a $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(m, \sigma)$ sont :

$$(3.13) \quad E(X) = m, \quad V(X) = \sigma^2, \quad \sigma_X = \sigma.$$

Loi normale centrée réduite

C'est la loi normale de moyenne 0 et d'écart type 1. Sa densité est alors définie par

$$(3.14) \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

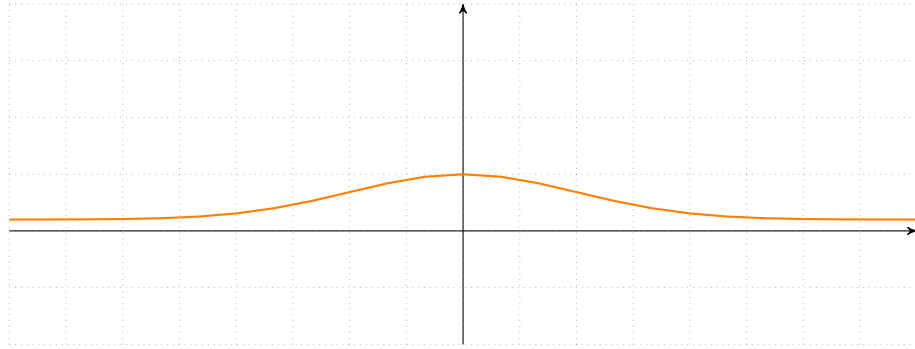
La fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$ est tabulée. Elle sert moyennant le changement de variable $X^* = \frac{X-m}{\sigma}$ à l'étude de toute loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$.

Utilisation pratique

Soient $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma)$ et $X^* = \frac{X-m}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ la loi normale centrée associée. Soit α un réel donné alors on a les règles de calcul suivantes :

- (1) $P(X \leq \alpha) = P\left(\frac{X-m}{\sigma} \leq \frac{\alpha-m}{\sigma}\right) = P\left(X^* \leq \frac{\alpha-m}{\sigma}\right) = F^*\left(\frac{\alpha-m}{\sigma}\right)$, où F^* est la fonction de répartition de X^* . Deux cas sont à distinguer :
 - (a) Si $\frac{\alpha-m}{\sigma} \geq 0$ alors on lit directement la valeur de $F^*\left(\frac{\alpha-m}{\sigma}\right)$ dans la table de $\mathcal{N}(0, 1)$.
 - (b) Si $\frac{\alpha-m}{\sigma} < 0$ alors on utilise la symétrie de la fonction densité de $\mathcal{N}(0, 1)$. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, par symétrie de la fonction densité de $\mathcal{N}(0, 1)$:

$$F^*(-a) = P(X^* \leq -a) = P(X^* \geq a) = 1 - P(X^* \leq a) = 1 - F^*(a).$$



On peut alors écrire pour tous réels a et b :

- (2) $P(X^* \leq -a) = P(X^* \geq a)$;
- (3) $P(X^* \leq a) = 1 - P(X^* \geq a)$;
- (4) $P(a \leq X^* \leq b) = P(X^* \leq b) - P(X^* \leq a)$;
- (5) $P(-a \leq X^* \leq a) = P(|X^*| \leq a) = 2P(X^* \leq a) - 1$, avec $a \geq 0$;
- (6) $P(X^* \leq a) = \beta$ avec $0 \leq \beta < 0,5$ c'est à dire β n'existe pas dans la table de $\mathcal{N}(0, 1)$ alors $P(X^* \leq -a) = 1 - \beta$ existe dans la table de $\mathcal{N}(0, 1)$.

Théorème 3.4. Soient $X_1 \sim \mathcal{N}(m_1, \sigma_1)$ et $X_2 \sim \mathcal{N}(m_2, \sigma_2)$ deux variables aléatoires normales indépendantes. Alors on a :

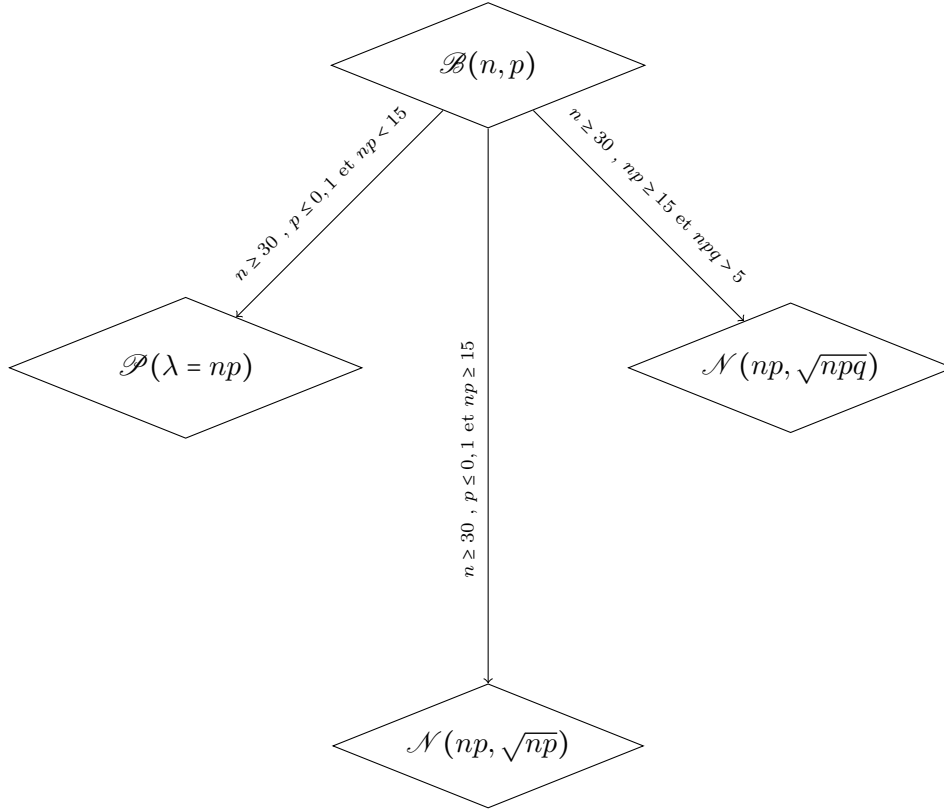
- (1) $X_1 + X_2 \sim \mathcal{N}(m_1 + m_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$;
- (2) $X_1 - X_2 \sim \mathcal{N}(m_1 - m_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$.

Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

Théorème 3.5 (Moivre-Laplace). Soit $X \sim \mathcal{B}(n, p)$. Lorsque n tend vers plus infini et p fixé alors $\mathcal{B}(n, p)$ tend vers $\mathcal{N}(np, \sqrt{np(1-p)})$.

Conditions d'approximation : Si $n \geq 30$, $np \geq 15$ et $np(1-p) > 5$ alors on peut approcher $\mathcal{B}(n, p)$ par $\mathcal{N}(np, \sqrt{np(1-p)})$.

Diagramme récapitulatif de quelques approximations d'une loi binomiale



3.4.4. Loi du Khi-deux ou Loi de Pearson

Soient $X_1, X_2, \dots, X_n$, n v.a indépendantes, normales centrées et réduites. La v.a $\chi_n^2 = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2$ suit une loi dite de Khi-deux à n degré de libertés. Les paramètres statistique d'une telle loi sont :

$$(3.15) \quad E(\chi_n^2) = n, \quad V(\chi_n^2) = 2n.$$

Dans la pratique si n est grand (c-à-d $n \geq 30$) alors χ_n^2 suit sensiblement la loi normale $\mathcal{N}(n; \sqrt{2n})$.

3.4.5. Loi de Student

Cette Loi a été construite spécialement pour les besoins des sondages sur des petits échantillons. Soit $Z_n = \frac{1}{n}\chi_n^2$ et $Y \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$. Supposons que $n > 2$. Alors $T_n = \frac{Y}{\sqrt{Z_n}}$ suit une loi dite de Student à n degré de libertés. Les paramètres caractéristiques d'une telle loi sont :

$$(3.16) \quad E(T_n) = 0, \quad V(T_n) = \frac{n}{n-2}.$$

Dans la pratique si n est grand (c-à-d $n \geq 30$) on peut prendre la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$ pour loi limite de loi de Student.

Remarque 3.3. Les lois de Pearson et de Student sont tabulées.

Loi de Poisson

(μ le nombre d'occurrences moyen)

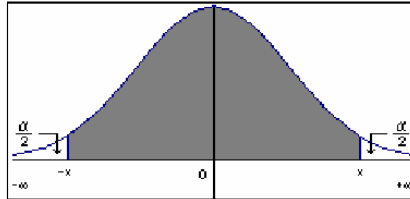
[illegible]

Table 3**Loi Normale Centrée Réduite****Fonction de répartition $F(z)=P(Z<z)$** Exemple : $P(Z<1.96)= 0.97500$ se trouve en ligne 1.9 et colonne 0.06

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,50000	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,52790	0,53188	0,53586
0,1	0,53983	0,54380	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56750	0,57142	0,57535
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59484	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,62930	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4	0,65542	0,65910	0,66276	0,66640	0,67003	0,67365	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5	0,69146	0,69498	0,69847	0,70194	0,70540	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,72241
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,75490
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,76731	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,78231	0,78524
0,8	0,78815	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82382	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1,0	0,84135	0,84375	0,84614	0,84850	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,1	0,86433	0,86650	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,87900	0,88100	0,88298
1,2	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90148
1,3	0,90320	0,90490	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91309	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,92220	0,92364	0,92507	0,92647	0,92786	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93319	0,93448	0,93575	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,94520	0,94630	0,94738	0,94845	0,94950	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95544	0,95637	0,95728	0,95819	0,95907	0,95994	0,96080	0,96164	0,96246	0,96327
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,97320	0,97381	0,97441	0,97500	0,97558	0,97615	0,97670
2,0	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97933	0,97982	0,98030	0,98077	0,98124	0,98169
2,1	0,98214	0,98257	0,98300	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,98500	0,98537	0,98574
2,2	0,98610	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,98840	0,98870	0,98899
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	0,99010	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,4	0,99180	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,5	0,99379	0,99396	0,99413	0,99430	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,99520
2,6	0,99534	0,99547	0,99560	0,99573	0,99585	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99897	0,99900
3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976

Table 4

Loi de Student



α	1	0,8	0,6	0,4	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
$1 - \alpha$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99	0,998	0,999
$v = \text{ddl}$											
1	0,0000	0,3249	0,7265	1,3764	3,0777	6,3137	12,706	31,821	63,656	318,29	636,58
2	0,0000	0,2887	0,6172	1,0607	1,8856	2,9200	4,3027	6,9645	9,9250	22,328	31,600
3	0,0000	0,2767	0,5844	0,9785	1,6377	2,3534	3,1824	4,5407	5,8408	10,214	12,924
4	0,0000	0,2707	0,5686	0,9410	1,5332	2,1318	2,7765	3,7469	4,6041	7,1729	8,6101
5	0,0000	0,2672	0,5594	0,9195	1,4759	2,0150	2,5706	3,3649	4,0321	5,8935	6,8685
6	0,0000	0,2648	0,5534	0,9057	1,4398	1,9432	2,4469	3,1427	3,7074	5,2075	5,9587
7	0,0000	0,2632	0,5491	0,8960	1,4149	1,8946	2,3646	2,9979	3,4995	4,7853	5,4081
8	0,0000	0,2619	0,5459	0,8889	1,3968	1,8595	2,3060	2,8965	3,3554	4,5008	5,0414
9	0,0000	0,2610	0,5435	0,8834	1,3830	1,8331	2,2622	2,8214	3,2498	4,2969	4,7809
10	0,0000	0,2602	0,5415	0,8791	1,3722	1,8125	2,2281	2,7638	3,1693	4,1437	4,5868
11	0,0000	0,2596	0,5399	0,8755	1,3634	1,7959	2,2010	2,7181	3,1058	4,0248	4,4369
12	0,0000	0,2590	0,5386	0,8726	1,3562	1,7823	2,1788	2,6810	3,0545	3,9296	4,3178
13	0,0000	0,2586	0,5375	0,8702	1,3502	1,7709	2,1604	2,6503	3,0123	3,8520	4,2209
14	0,0000	0,2582	0,5366	0,8681	1,3450	1,7613	2,1448	2,6245	2,9768	3,7874	4,1403
15	0,0000	0,2579	0,5357	0,8662	1,3406	1,7531	2,1315	2,6025	2,9467	3,7329	4,0728
16	0,0000	0,2576	0,5350	0,8647	1,3368	1,7459	2,1199	2,5835	2,9208	3,6861	4,0149
17	0,0000	0,2573	0,5344	0,8633	1,3334	1,7396	2,1098	2,5669	2,8982	3,6458	3,9651
18	0,0000	0,2571	0,5338	0,8620	1,3304	1,7341	2,1009	2,5524	2,8784	3,6105	3,9217
19	0,0000	0,2569	0,5333	0,8610	1,3277	1,7291	2,0930	2,5395	2,8609	3,5793	3,8833
20	0,0000	0,2567	0,5329	0,8600	1,3253	1,7247	2,0860	2,5280	2,8453	3,5518	3,8496
21	0,0000	0,2566	0,5325	0,8591	1,3232	1,7207	2,0796	2,5176	2,8314	3,5271	3,8193
22	0,0000	0,2564	0,5321	0,8583	1,3212	1,7171	2,0739	2,5083	2,8188	3,5050	3,7922
23	0,0000	0,2563	0,5317	0,8575	1,3195	1,7139	2,0687	2,4999	2,8073	3,4850	3,7676
24	0,0000	0,2562	0,5314	0,8569	1,3178	1,7109	2,0639	2,4922	2,7970	3,4668	3,7454
25	0,0000	0,2561	0,5312	0,8562	1,3163	1,7081	2,0595	2,4851	2,7874	3,4502	3,7251
26	0,0000	0,2560	0,5309	0,8557	1,3150	1,7056	2,0555	2,4786	2,7787	3,4350	3,7067
27	0,0000	0,2559	0,5306	0,8551	1,3137	1,7033	2,0518	2,4727	2,7707	3,4210	3,6895
28	0,0000	0,2558	0,5304	0,8546	1,3125	1,7011	2,0484	2,4671	2,7633	3,4082	3,6739
29	0,0000	0,2557	0,5302	0,8542	1,3114	1,6991	2,0452	2,4620	2,7564	3,3963	3,6595
30	0,0000	0,2556	0,5300	0,8538	1,3104	1,6973	2,0423	2,4573	2,7500	3,3852	3,6460
40	0,0000	0,2550	0,5286	0,8507	1,3031	1,6839	2,0211	2,4233	2,7045	3,3069	3,5510
50	0,0000	0,2547	0,5278	0,8489	1,2987	1,6759	2,0086	2,4033	2,6778	3,2614	3,4960
60	0,0000	0,2545	0,5272	0,8477	1,2958	1,6706	2,0003	2,3901	2,6603	3,2317	3,4602
70	0,0000	0,2543	0,5268	0,8468	1,2938	1,6669	1,9944	2,3808	2,6479	3,2108	3,4350
80	0,0000	0,2542	0,5265	0,8461	1,2922	1,6641	1,9901	2,3739	2,6387	3,1952	3,4164
90	0,0000	0,2541	0,5263	0,8456	1,2910	1,6620	1,9867	2,3685	2,6316	3,1832	3,4019
100	0,0000	0,2540	0,5261	0,8452	1,2901	1,6602	1,9840	2,3642	2,6259	3,1738	3,3905
200	0,0000	0,2537	0,5252	0,8434	1,2858	1,6525	1,9719	2,3451	2,6006	3,1315	3,3398
∞	0,0000	0,2533	0,5244	0,8416	1,2816	1,6449	1,9600	2,3263	2,5758	3,0903	3,2906

Table 5

Loi du χ^2

$$P(\chi_v^2 \geq \chi_{v,\alpha}^2) = \alpha$$

$1 - \alpha$	0,001	0,005	0,01	0,025	0,05	0,1	0,5	0,9	0,95	0,975	0,99	0,995	0,999
α	0,999	0,995	0,99	0,975	0,95	0,9	0,5	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001
$v = \text{ddl}$													
1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,02	0,45	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88	10,83
2	0,00	0,01	0,02	0,05	0,10	0,21	1,39	4,61	5,99	7,38	9,21	10,60	13,82
3	0,02	0,07	0,11	0,22	0,35	0,58	2,37	6,25	7,81	9,35	11,34	12,84	16,27
4	0,09	0,21	0,30	0,48	0,71	1,06	3,36	7,78	9,49	11,14	13,28	14,86	18,47
5	0,21	0,41	0,55	0,83	1,15	1,61	4,35	9,24	11,07	12,83	15,09	16,75	20,51
6	0,38	0,68	0,87	1,24	1,64	2,20	5,35	10,64	12,59	14,45	16,81	18,55	22,46
7	0,60	0,99	1,24	1,69	2,17	2,83	6,35	12,02	14,07	16,01	18,48	20,28	24,32
8	0,86	1,34	1,65	2,18	2,73	3,49	7,34	13,36	15,51	17,53	20,09	21,95	26,12
9	1,15	1,73	2,09	2,70	3,33	4,17	8,34	14,68	16,92	19,02	21,67	23,59	27,88
10	1,48	2,16	2,56	3,25	3,94	4,87	9,34	15,99	18,31	20,48	23,21	25,19	29,59
11	1,83	2,60	3,05	3,82	4,57	5,58	10,34	17,28	19,68	21,92	24,73	26,76	31,26
12	2,21	3,07	3,57	4,40	5,23	6,30	11,34	18,55	21,03	23,34	26,22	28,30	32,91
13	2,62	3,57	4,11	5,01	5,89	7,04	12,34	19,81	22,36	24,74	27,69	29,82	34,53
14	3,04	4,07	4,66	5,63	6,57	7,79	13,34	21,06	23,68	26,12	29,14	31,32	36,12
15	3,48	4,60	5,23	6,26	7,26	8,55	14,34	22,31	25,00	27,49	30,58	32,80	37,70
16	3,94	5,14	5,81	6,91	7,96	9,31	15,34	23,54	26,30	28,85	32,00	34,27	39,25
17	4,42	5,70	6,41	7,56	8,67	10,09	16,34	24,77	27,59	30,19	33,41	35,72	40,79
18	4,90	6,26	7,01	8,23	9,39	10,86	17,34	25,99	28,87	31,53	34,81	37,16	42,31
19	5,41	6,84	7,63	8,91	10,12	11,65	18,34	27,20	30,14	32,85	36,19	38,58	43,82
20	5,92	7,43	8,26	9,59	10,85	12,44	19,34	28,41	31,41	34,17	37,57	40,00	45,31
21	6,45	8,03	8,90	10,28	11,59	13,24	20,34	29,62	32,67	35,48	38,93	41,40	46,80
22	6,98	8,64	9,54	10,98	12,34	14,04	21,34	30,81	33,92	36,78	40,29	42,80	48,27
23	7,53	9,26	10,20	11,69	13,09	14,85	22,34	32,01	35,17	38,08	41,64	44,18	49,73
24	8,08	9,89	10,86	12,40	13,85	15,66	23,34	33,20	36,42	39,36	42,98	45,56	51,18
25	8,65	10,52	11,52	13,12	14,61	16,47	24,34	34,38	37,65	40,65	44,31	46,93	52,62
26	9,22	11,16	12,20	13,84	15,38	17,29	25,34	35,56	38,89	41,92	45,64	48,29	54,05
27	9,80	11,81	12,88	14,57	16,15	18,11	26,34	36,74	40,11	43,19	46,96	49,65	55,48
28	10,39	12,46	13,56	15,31	16,93	18,94	27,34	37,92	41,34	44,46	48,28	50,99	56,89
29	10,99	13,12	14,26	16,05	17,71	19,77	28,34	39,09	42,56	45,72	49,59	52,34	58,30
30	11,59	13,79	14,95	16,79	18,49	20,60	29,34	40,26	43,77	46,98	50,89	53,67	59,70

Pour $v > 30$, La loi du χ^2 peut être approximée par la loi normale $N(v, \sqrt{v})$