

Contrôle Équation Différentielle Ordinaires (EDO)

Durée: 3 heures

Exercice 1

Déterminer, en fonction de $a \in \mathbb{R}$, si les équations suivantes admettent une solution locale, si elle est unique et déterminer l'intervalle maximal I sur lequel les solutions sont définies.

1. $y' = y^3$, $y(0) = a$,
2. $y' = \sqrt{|y^2 - 1|}$, $y(0) = a$ (suivant les cas, on pourra poser $y = \epsilon \operatorname{ch}(t)$ ou $y = \sin(\theta)$, où ϵ est une constante à préciser)

Exercice 2

Soit $a > -1$. On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = y \log(1 + y) \\ y(0) = a \end{cases}, \quad (1)$$

On notera $y_a(t)$ la solution maximale de (1) définie sur $I_a =]T_a^-, T_a^+[\subset \mathbb{R}$.

1. Déterminer l'ensemble $\Omega \subset \mathbb{R}$ sur lequel l'équation est définie.
2. Trouver toutes les solutions constantes de (1).
3. Montrer que, pour $a \neq 0$, la solution $y_a(t)$ ne change pas de signe.
4. Montrer que les limites $l_a^\pm = \lim_{t \rightarrow T_a^\pm} y_a(t)$ existent et les calculer.
5. Déterminer $T_a^\pm$ et tracer l'allure des solutions de (1).

Exercice 3

Équation différentielles: Une méthode à un pas Soit $g \in C^1(\mathbb{R})$, à valeurs positives.

On considère une équation différentielle du premier ordre, de la forme $y' = f(y)$, que l'on discrétise par une méthode à un pas de la forme

$$y_{n+1} = \frac{y_n}{1 + hg(y_n)}$$

où h est le pas de discrétisation, $n \in \mathbb{N}$ et y_n approche $y(nh)$.

1. Écrire cette méthode sous la forme générique d'une méthode à un pas. Exprimer f en fonction de g pour que la méthode soit consistante.
2. On suppose que $y(0) = y_0$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n \in [0, y_0]$.
3. En déduire la stabilité, puis la convergence de la méthode.

Bon courage et bonne inspiration !!!