

Résumé d'algèbre linéaire de Math Sup

I - Espaces vectoriels - Sous espaces vectoriels

1) Structure de $\mathbb{K}$ -espace vectoriel Soient $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$ et E un ensemble non vide muni d'une l.d.c.i. notée $+$ et d'une l.d.c.e. de domaine $\mathbb{K}$ notée $\cdot$.

$(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel $\Leftrightarrow (E, +)$ est groupe abélien (c'est-à-dire que $+$ est commutative, associative, possède un élément neutre noté 0 et tout x de E possède un symétrique pour $+$ noté $-x$) et $+$ et $\cdot$ vérifient les quatre axiomes

- (1) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (x, y) \in E^2, \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$
- (2) $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall x \in E, (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$
- (3) $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall x \in E, \lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda \mu) \cdot x$
- (4) $\forall x \in E, 1 \cdot x = x$.

2) Exemples de $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels supposés connus (Dans les exemples qui suivent les opérations ne sont pas citées et sont toujours les opérations usuelles dans les ensembles considérés)

a) $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels

- 1) $\mathbb{C}$ est $\mathbb{R}$ -ev de dimension 2, $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{Q}$ -ev de dimension infinie, $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{Q}$ -ev de dimension infinie, $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension 1.
- 2) $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$ -ev (modèle de l'espace de dimension n : tout espace de dimension finie n sur $\mathbb{K}$ est isomorphe à $\mathbb{K}^n$)
- 3) $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est un $\mathbb{K}$ -ev de dimension infinie (suites à coefficients dans $\mathbb{K}$)
- 4) $\mathbb{K}[X]$ est un $\mathbb{K}$ -ev de dimension infinie (polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$)
- 5) $\mathbb{K}(X)$ est un $\mathbb{K}$ -ev (fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{K}$)
- 6) $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ est un $\mathbb{R}$ -ev de dimension infinie (applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) et plus généralement F^A (ensemble des applications de A dans F) où A est un ensemble quelconque non vide et F est un $\mathbb{K}$ -ev
- 7) $(\mathcal{L}(E, F), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel quand E et F le sont et en particulier $(\mathcal{L}(E), +, \cdot)$ et $(E^*, +, \cdot)$. Si E et F sont de dimension finie, $\dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim(E) \times \dim(F)$.
- 8) $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel si les E_i le sont.
- 9) $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension np .
- 10) $C^k(I, \mathbb{K})$ et $C^\infty(I, \mathbb{K})$ sont des $\mathbb{K}$ -espaces de dimension infinie.

b) $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels munis en plus d'une structure d'anneau

- 1) $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps commutatif.
- 2) $(\mathcal{L}(E), +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est un anneau, non commutatif si $\dim E \geq 2$.
- 3) $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $(M_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau, non commutatif si $n \geq 2$.
- 4) $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \times)$ est un anneau commutatif et non intègre (c'est-à-dire qu'un produit de facteurs peut être nul sans qu'aucun facteur ne soit nul)
- 5) $(C^0(I, \mathbb{K}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $(C^0(I, \mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau commutatif et non intègre.
- $(C^k(I, \mathbb{R}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et $(C^k(I, \mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau commutatif et non intègre.
- $(C^\infty(I, \mathbb{R}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et $(C^\infty(I, \mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau commutatif et non intègre.
- 6) $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $(\mathbb{K}[X], +, \times)$ est un anneau commutatif et intègre.
- $(\mathbb{K}(X), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $(\mathbb{K}(X), +, \times)$ est un corps commutatif.

3) Sous espaces vectoriels

a) Définition et caractérisation.

F sev de $E \Leftrightarrow F \subset E; F \neq \emptyset, F$ stable pour $+$ et $\cdot$ et F est un $\mathbb{K}$ -ev pour les lois induites (définition)

$$\Leftrightarrow F \subset E, 0_E \in F \text{ et } F \text{ stable pour } + \text{ et } \cdot$$

$$\Leftrightarrow F \subset E, 0_E \in F \text{ et } \forall (x, y) \in F^2, x + y \in F \text{ et } \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda x \in F$$

$$\Leftrightarrow F \subset E, 0_E \in F \text{ et } \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall (x, y) \in F^2, \lambda x + \mu y \in F \text{ (c'est-à-dire } F \text{ stable par combinaisons linéaires)}$$

b) Intersection et somme.

Si F et G sont deux sev de E alors $F \cap G$ et $F + G$ sont des sev de E . Plus généralement, si $F_1, F_2, \dots, F_p$ sont des sev de E alors $F_1 \cap F_2 \dots \cap F_p$ et $F_1 + F_2 \dots + F_p$ sont des sev de E .

Remarque. En général, $F \cup G$ n'est pas un sev et $\text{Vect}(F \cup G) = F + G$ (voir exercice n° 1, planche 1).

4) Sommes directes. Sous espaces vectoriels supplémentaires

a) **Cas de deux sous espaces.** Soient F et G deux sev de E .

La somme $F + G$ est directe $\Leftrightarrow$ tout x de $F + G$ s'écrit de manière unique $x = x_1 + x_2$ où $x_1 \in F$ et $x_2 \in G$
 $\Leftrightarrow$ l'application $\varphi : F \times G \rightarrow E$ est injective
 $(x, y) \mapsto x + y$
 $\Leftrightarrow F \cap G = \{0\}$ (théorème.)

Dans ce cas, $F + G$ se note $F \oplus G$ et $F \oplus G$ est isomorphe à $F \times G$ (φ est un isomorphisme).

F et G sont supplémentaires dans $E \Leftrightarrow$ tout x de E s'écrit de manière unique $x = x_1 + x_2$ où $x_1 \in F$ et $x_2 \in G$
 $\Leftrightarrow$ l'application $\varphi : F \times G \rightarrow E$ est bijective
 $(x, y) \mapsto x + y$
 $\Leftrightarrow F \cap G = \{0\}$ et $E = F + G$ (théorème.)

L'existence d'un supplémentaire est démontrée en dimension finie et est admise en dimension infinie mais ne peut être utilisée.

Exemples de base. • $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$ (décomposition d'une fonction $f : \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \underbrace{\frac{1}{2}(f(x) + f(-x))}_{\in \mathcal{P}} + \underbrace{\frac{1}{2}(f(x) - f(-x))}_{\in \mathcal{I}}$).

• $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = S_n(\mathbb{K}) \oplus A_n(\mathbb{K})$ (décomposition d'une matrice $M : M = \underbrace{\frac{1}{2}(M + {}^tM)}_{\in S_n} + \underbrace{\frac{1}{2}(M - {}^tM)}_{\in A_n}$).

b) **Cas général d'un nombre fini de sous espaces.** $F_1, \dots, F_p, p \geq 2$, sont p sev de E .

La somme $F_1 + \dots + F_p$ est directe $\Leftrightarrow$ tout x de $F_1 + \dots + F_p$ s'écrit de manière unique $x = x_1 + \dots + x_p$
 où $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, x_i \in F_i$
 $\Leftrightarrow$ l'application $\varphi : F_1 \times \dots \times F_p \rightarrow E$ est injective
 $(x_1, \dots, x_p) \mapsto x_1 + \dots + x_p$
 $\Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, F_i \cap \left(\sum_{j \neq i} F_j \right) = \{0\}$ (théorème.)
 $\Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 2, p \rrbracket, F_i \cap \left(\sum_{j=1}^{i-1} F_j \right) = \{0\}$ (théorème.)

Dans ce cas, la somme $F_1 + \dots + F_p$ se note $F_1 \oplus \dots \oplus F_p$. $F_1 \oplus \dots \oplus F_p$ est isomorphe à $F_1 \times \dots \times F_p$ (φ est un isomorphisme).

Danger. Il est faux de croire que la somme $\sum_i F_i$ est directe si et seulement si $\forall i \neq j, F_i \cap F_j = \{0\}$. Si la somme est directe, on a obligatoirement $\forall i \neq j, F_i \cap F_j = \{0\}$ mais ce n'est pas suffisant. Le cas de trois droites vectorielles de $\mathbb{R}^2$ deux à deux distinctes fournit un contre exemple usuel.

5) Projections et symétries Soient F et G deux sev supplémentaires de E . Soient p la projection sur F parallèlement à G , q la projection sur G parallèlement à F et s la symétrie par rapport à F parallèlement à G .

Soit $x = x_1 + x_2$ la décomposition d'un vecteur quelconque x de E associée à la décomposition $E = F \oplus G$. Par définition, $p(x) = x_1$ et $s(x) = x_1 - x_2$.

- a) • $\forall x \in E, p(x) = x_1$.
- $p \in \mathcal{L}(E)$.
- $p \circ p = p, p \circ q = q \circ p = 0, p + q = \text{Id}_E$.
- $F = \text{Imp} = \text{Ker} q = \text{Ker}(\text{Id} - p) = \{\text{vecteurs invariants par } p\}$ et $G = \text{Kerp} = \text{Im} q = \text{Im}(\text{Id} - p)$
- $p|_{\text{Imp}} = \text{Id}_{\text{Imp}}$ et $p|_{\text{Kerp}} = 0_{\text{Kerp}}$.

Réciproquement, si p est un endomorphisme vérifiant $p \circ p = p$ alors p est la projection sur Imp parallèlement à Kerp .

- b) • $\forall x \in E, s(x) = x_1 - x_2$.
- $s \in \text{GL}(E)$.
- $s \circ s = \text{Id}, s = 2p - \text{Id} = \text{Id} - 2q$ ou aussi $p = \frac{1}{2}(\text{Id} + s)$.

- $F = \text{Ker}(s - \text{Id}) = \{\text{vecteurs invariants par } s\}$ et $G = \text{Ker}(s + \text{Id}) = \{\text{vecteurs changés en leur opposé}\}$.

Réciproquement, si s est un endomorphisme de E vérifiant $s \circ s = \text{Id}$ alors s est la symétrie par rapport à $\text{Ker}(s - \text{Id})$ parallèlement à $\text{Ker}(s + \text{Id})$.

6) Combinaisons linéaires et sous-espace engendré par une famille ou une partie de E

a) Combinaisons linéaires.

Soit $(\lambda_i)_{i \in I}$ une famille non vide de scalaires. Cette famille est dite à support fini si et seulement si l'ensemble des indices i tels que $\lambda_i \neq 0$ est fini (éventuellement vide).

Soit $(x_i)_{i \in I}$ est une famille non vide de vecteurs de E . Un vecteur y de E est combinaison linéaire de la famille $(x_i)_{i \in I}$ si et seulement si il existe $(\lambda_i)_{i \in I}$ une famille de scalaires à support fini telle que $y = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i$.

En particulier, si la famille $(x_i)_{i \in I}$ est de cardinal infini, un vecteur y est combinaison linéaire de la famille $(x_i)_{i \in I}$ si et seulement si y est combinaison linéaire d'une sous-famille finie de la famille $(x_i)_{i \in I}$.

Soit X une partie de E . y est combinaison linéaire des vecteurs de X si et seulement si il existe une famille de scalaires $(\lambda_x)_{x \in X}$ à support fini telle que $y = \sum_{x \in X} \lambda_x x$ (convention usuelle : $\sum_{\emptyset} = 0$).

b) Sous espace engendré par une famille ou une partie.

Approche externe. Soit $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de E (ou X une partie de E) éventuellement vide. Il existe un et un seul plus petit sous-espace vectoriel (pour l'inclusion) de E contenant les vecteurs de $\mathcal{F}$ (ou contenant X) et noté $\text{Vect}(\mathcal{F})$ (ou $\text{Vect}(X)$). C'est l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E contenant $\mathcal{F}$ (ou X) (et donc $\text{Vect}(\emptyset) = \{0\}$).

Approche interne. $\text{Vect}\mathcal{F}$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de $\mathcal{F}$.

c) Propriétés.

- $\text{Vect}(x_i) = \{\text{combinaisons linéaires des } x_i\} = \{\sum_{i \in I} \lambda_i x_i, (\lambda_i)_{i \in I} \text{ à support fini}\} = \text{plus petit sev de } E \text{ contenant les vecteurs de la famille } (x_i)_{i \in I}$.

de la famille $(x_i)_{i \in I}$.

- $A \subset \text{Vect}A$ et $\text{Vect}A$ est un sev de E . Puis $A = \text{Vect}A \Leftrightarrow A \text{ sev de } E$.
- $A \subset B \Rightarrow \text{Vect}A \subset \text{Vect}B$ (réciproque fausse).
- $\text{Vect}(\text{Vect}A) = \text{Vect}A$.
- $\text{Vect}(A \cup B) = \text{Vect}A + \text{Vect}B$ et $\text{Vect}(A \cap B) \subset \text{Vect}A \cap \text{Vect}B$.

II - Familles libres. Familles génératrices. Bases

1) Familles libres.

a) Définitions.

$(x_i)_{i \in I}$ est libre $\Leftrightarrow (\forall (\lambda_i)_{i \in I} \in K^I \text{ à support fini}) [(\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0) \Rightarrow (\forall i \in I, \lambda_i = 0)]$.

$(x_i)_{i \in I}$ est liée $\Leftrightarrow (\exists (\lambda_i)_{i \in I} \in K^I \text{ à support fini telle que les } \lambda_i \text{ ne soient pas tous nuls et } \sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0)$ (une telle relation est alors une relation de dépendance linéaire).

Une famille infinie est libre si et seulement si toute sous-famille finie est libre.

Une famille infinie est liée si et seulement si il existe une sous-famille finie liée.

b) Propriétés.

Soit $L = (x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E .

- Si L contient le vecteur nul ou 2 vecteurs colinéaires, L est liée (réciproque fausse).
- L est liée si et seulement si il existe un vecteur de L qui est combinaison linéaire des autres vecteurs de L .
- Toute sur-famille d'une famille liée est liée. Toute sous-famille d'une famille libre est libre (convention : $\emptyset$ est libre).
- L est libre $\Leftrightarrow (\sum_i \lambda_i x_i = \sum_i \mu_i x_i \Leftrightarrow \forall i, \lambda_i = \mu_i)$ (on peut identifier les coefficients quand L est libre et uniquement quand L est libre)
- Soit $L' = L \cup \{x\}$. pour toutes familles de scalaires $(\lambda_i)_{i \in I}$ et $(\mu_i)_{i \in I}$ à supports finis, $[(L \text{ libre et } L' \text{ liée}) \Rightarrow x \text{ est combinaison linéaire des } x_i]$

2) Familles génératrices.

$(x_i)_{i \in I}$ est génératrice de $E \Leftrightarrow \text{Vect}(x_i)_{i \in I} = E \Leftrightarrow$ tout vecteur de E est combinaison linéaire des vecteurs de la famille $(x_i)_{i \in I}$.

Toute sur famille d'une famille génératrice est génératrice.

3) Bases.

$\mathcal{B} = (x_i)_{i \in I}$ base de $E \Leftrightarrow$ tout vecteur x de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des $x_i \Leftrightarrow \mathcal{B}$ est libre et génératrice.

Si $x = \sum_i \lambda_i x_i$, les λ_i sont les coordonnées de x dans $\mathcal{B}$.

Théorème. Les bases de E sont les parties génératrices minimales pour l'inclusion ou libres maximales. Donc, si $x \notin \mathcal{B}$, $\mathcal{B} \cup \{x\}$ n'est plus libre et si $x \in \mathcal{B}$, $\mathcal{B} \setminus \{x\}$ n'est plus génératrice.

III- Applications linéaires

1) Définition. Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -ev et f une application de E dans F .

$$\begin{aligned} f \text{ linéaire} &\Leftrightarrow \forall (x, y) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, f(x + y) = f(x) + f(y) \text{ et } f(\lambda x) = \lambda f(x) \\ &\Leftrightarrow \forall (x, y) \in E^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y). \end{aligned}$$

Si f est linéaire, on a toujours $f(0_E) = 0_F$.

2) Images directes et réciproques.

Théorème. Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et f linéaire de E dans F .

L'image directe d'un sous-espace de E est un sous-espace de F .

L'image réciproque d'un sous-espace de F est un sous-espace de E .

En particulier, $\text{Ker} f = \{x \in E / f(x) = 0_F\} = f^{-1}(\{0_F\})$ est un sous-espace de E et $\text{Im} f = \{f(x) / x \in E\} = f(E)$ est un sous-espace de F .

(f injective $\Leftrightarrow \text{Ker} f = \{0\}$), (f surjective $\Leftrightarrow \text{Im} f = F$) (f bijective $\Leftrightarrow \text{Ker} f = \{0\}$ et $\text{Im} f = F$).

Vocabulaire usuel : (homomorphisme=application linéaire) (endomorphisme = application linéaire de E vers E) (isomorphisme = application linéaire bijective de E sur F) (automorphisme =application linéaire bijective de E sur E).

Théorème. Soit f linéaire de E vers F . Si X est génératrice de E , $f(X)$ est génératrice de $\text{Im} f = f(E)$ et en particulier si f est surjective, $f(X)$ est génératrice de F .

Théorème. Si f est linéaire et X est liée alors $f(X)$ est liée.

Si f est injective et X est libre dans E alors $f(X)$ est libre dans F .

Théorème. f est un isomorphisme de E sur F si et seulement si l'image par f d'une base de E est une base de F .

Détermination sur une base : soit $(e_i)_{i \in I}$ une base de E , $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est entièrement déterminée par les $f(e_i)$ et en particulier deux applications linéaires qui coïncident sur une base coïncident.

3) Ensembles d'applications linéaires.

• $(\mathcal{L}(E, F), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et de plus $(\mathcal{L}(E), +, \cdot)$ est anneau, non commutatif si $\dim E \geq 2$.

• $(\mathcal{GL}(E), \cdot)$ est un groupe, non commutatif si $\dim E \geq 2$. $\mathcal{GL}(E)$ = groupe linéaire de E = {automorphismes de E } = {invertibles de $\mathcal{L}(E)$ pour $\cdot$ }.

Danger. Si f et g sont dans $\mathcal{GL}(E)$, $f + g$ ne l'est que très rarement.

• $(E^*, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. E^* = dual de E = {formes linéaires sur E } = $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.

• $(O(E), \cdot)$ est un sous-groupe de $(\mathcal{GL}(E), \cdot)$, appelé le groupe orthogonal (notion euclidienne).

• $(SL(E), \cdot)$ est un sous-groupe de $(\mathcal{GL}(E), \cdot)$, appelé le groupe spécial linéaire (si E est de dimension finie, $SL(E)$ =ensemble des endomorphismes de E de déterminant 1).

IV - Dimension des espaces vectoriels

1) Dimension.

E est dit de dimension finie sur $\mathbb{K}$ si et seulement si E admet une partie génératrice finie. E est dit de dimension infinie sinon. E est de dimension infinie si et seulement si E contient une famille libre infinie.

Théorème de la dimension finie. Si E de dimension finie, toutes les bases ont même cardinal (fini) et $\dim_{\mathbb{K}}(E)$ est le cardinal d'une base quelconque.

(Convention. $\emptyset$ est une base de $\{0\}$ et $\dim\{0\} = 0$.)

Deux espaces vectoriels E et F de dimensions finies sont isomorphes si et seulement si ils ont même dimension.

$\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n = n$ et si $e_i = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ alors $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base de $\mathbb{K}^n$ appelée base canonique de $\mathbb{K}^n$. Si $\dim E = n < +\infty$, E est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

2) Familles libres et génératrices. Soit $n = \dim E < +\infty$.

Si L est libre alors $\text{card} L \leq n$ et de plus (L base de $E \Leftrightarrow \text{card} L = n$).

Si G est génératrice de E alors $\text{card} G \leq n$ et de plus (G base de $E \Leftrightarrow \text{card} G = n$).

Théorème. Si E est de dimension finie n et si $\mathcal{B}$ est une famille de vecteurs de E , deux des trois propositions suivantes entraînent la troisième :

- 1) $\text{card}\mathcal{B} = n$
- 2) $\mathcal{B}$ est libre
- 3) $\mathcal{B}$ est génératrice de E

Théorème de la base incomplète. Soit L libre dans E de dimension finie. L peut être complétée en une base de E .

Si $\dim E < +\infty$, E admet des bases.

Si $\dim E < +\infty$, de toute famille génératrice de E , on peut extraire une base.

3) Sous espaces.

Soit $n = \dim E < +\infty$ et soit F sev de E alors $(\dim F \leq n \text{ et } \dim F = n \Leftrightarrow F = E)$ (faux en dimension infinie).

Théorème. (Supplémentaires) Soit $n = \dim E < +\infty$ et soit F sev de E

- F admet au moins un supplémentaire.
- Tout supplémentaire de F a pour dimension $\dim E - \dim F$.
- plus généralement, $\dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G$.

Théorème. Soient F et G sev de E .

$(E = F \oplus G) \Leftrightarrow (F \cap G = \{0\} \text{ et } \dim F + \dim G = \dim E) \Leftrightarrow (F + G = E \text{ et } \dim F + \dim G = \dim E)$.

Plus généralement, $\dim(F_1 \oplus \dots \oplus F_p) = \dim F_1 + \dots + \dim F_p$.

Si $F_1 \oplus \dots \oplus F_p = E$ et si $\mathcal{B}_i$ est une base de F_i alors $\mathcal{B} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{B}_i$ est une base de E . Réciproquement, si $\mathcal{B} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{B}_i$ est une base de E alors les $F_i = \text{Vect}\mathcal{B}_i$ sont supplémentaires dans E .

4) Rang.

a) d'une famille de vecteurs.

Soit $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$ une famille de vecteurs de E . $\text{rg}(x_i)_{1 \leq i \leq p} = \dim \text{Vect}(x_i)_{1 \leq i \leq p} = \text{maximum du cardinal d'une sous-famille libre extraite de } (x_i)_{1 \leq i \leq p}$.

Soient $n = \dim E$, $r = \text{rg}(x_i)_{1 \leq i \leq p}$ (et $p = \text{card}(x_i)_{1 \leq i \leq p}$).

- $r \leq p$ et $r = p \Leftrightarrow (x_i)_{1 \leq i \leq p}$ libre.
- $r \leq n$ et $r = n \Leftrightarrow (x_i)_{1 \leq i \leq p}$ génératrice de E .
- $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$ base de $E \Leftrightarrow r = p = n$.

b) d'une application linéaire.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ où E est de dimension finie. $\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}f) = \text{rg}((f(e_i))_{1 \leq i \leq n})$ où $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base de E quelconque.

Théorème du rang. La restriction de f à un supplémentaire de $\text{Ker}f$ réalise un isomorphisme de ce supplémentaire sur $\text{Im}f$. En particulier, $\dim \text{Ker}f + \text{rg}f = \dim E$.

Conséquences.

Théorème. Si $\dim E = \dim F < +\infty$ et $f \in \mathcal{L}(E, F)$ alors $(f \text{ est injective} \Leftrightarrow f \text{ est surjective} \Leftrightarrow f \text{ est bijective})$.

Théorème. Si $n = \dim E < +\infty$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ les propriétés suivantes sont équivalentes :

- | | | |
|--|--|---|
| 1) f bijective | 2) $\det(f) \neq 0$ | 3) f injective |
| 4) f surjective | 5) $\text{Ker}f = \{0\}$ | 6) $\text{Im}f = E$ |
| 7) $\text{rg}f = n$ | 8) f inversible à droite pour $\circ$ | 9) f inversible à gauche pour $\circ$ |
| 10) f simplifiable à droite pour $\circ$ | 11) f simplifiable à gauche pour $\circ$ | |

c) Transformations ne modifiant pas le rang.

Les transformations élémentaires suivantes ne modifie pas le rang (car ne modifie pas le sous espace engendré) :

- a) permuter les vecteurs de la famille
- b) remplacer un vecteur x de la famille par λx où λ est un scalaire non nul
- c) ajouter à un vecteur x de la famille un autre vecteur de la famille.

Plus généralement, on ne modifie pas le rang d'une famille en ajoutant à un vecteur x de cette famille une combinaison linéaire des autres vecteurs de cette famille.

5) Dimensions usuelles.

- $\dim(E \times F) = \dim E + \dim F$ et plus généralement $\dim(E_1 \times \dots \times E_p) = \dim E_1 + \dots + \dim E_p$.
- $\dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G$ et plus généralement $\dim(E_1 \oplus \dots \oplus E_p) = \dim E_1 + \dots + \dim E_p$.
- $\dim(\mathcal{L}(E, F)) = (\dim E) \times (\dim F)$. Donc $\dim(\mathcal{L}(E)) = (\dim E)^2$ et $\dim(E^*) = \dim E$.
- $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$.