

Licence fondamentale de Mathématiques
Année Académique 2023-2024

Travaux dirigés d'Analyse Complexe

Exercice 1

1. Calculer les expressions suivantes : $\ln(-e)$, $\ln(i)$, i^i , $i^{\ln(i)}$, $\sqrt{i}$.
2. Déterminer pour quels $z \in \mathbb{C}$ les égalités $\ln(e^z) = z$ et $e^{\ln(z)} = z$ sont vérifiées.
3. Soient a et b deux complexes distincts. Pour quels $z \in \mathbb{C} \setminus \{b\}$ a-t-on

$$\arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right) = \pi.$$

Exercice 2

Les propriétés suivantes sont-elles vraies quels que soient $z, w \in \mathbb{C}_0$ et $c, d \in \mathbb{C}$?

1. $\ln(zw) = \ln(z) + \ln(w)$
2. $(zw)^c = z^c w^c$
3. $z^c z^d = z^{c+d}$
4. $(z^c)^d = z^{cd}$

Exercice 3 (Fonctions trigonométriques inverses)

Soient $w \in \mathbb{C}$. Résoudre les équations suivantes

1. $\cos(z) = w$
2. $\sin(z) = w$
3. $\tan(z) = w$, $w \notin \{-i, i\}$
4. $\cos(z) = w$, $w \notin \{-i, i\}$

Exercice 4

1. Vérifier l'analyticité de la fonction logarithmique en appliquant les conditions de Cauchy-Riemann en coordonnées polaires.
2. Résoudre l'équation $\operatorname{ch} z = 0$.
3. Résoudre l'équation $\sin z = 2$.
4. Trouver la valeur principale de $[(1+i)^{(1-i)}]^{(1+i)}$

Exercice 5

Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ telle que $f(z) = f(z+1) = f(z+i)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Prouver que f est constante.

Exercice 6

Soit $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ où $[0; 1] \subset \Omega$ où f vérifie $f(z) = f(z+1)$ pour tout $z \in \Omega$. Montrer que f peut être prolongé analytiquement sur une bande $\{z \in \mathbb{C} : -\delta < \operatorname{Im}(z) < \delta\}$ pour un certain $\delta > 0$.

Exercice 7

1. Soit $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$ et soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. On pose $u = \operatorname{Re}(f)$ et $v = \operatorname{Im}(f)$.
 - (a) Rappeler les équations de Cauchy-Riemann.
 - (b) Montrer que u vérifie l'équation de Laplace $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.
2. On suppose que l'on peut écrire $u(x, y) = \psi(x^2 + y^2)$ pour une certaine fonction $\psi :]1, 4[\rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^2 .

(a) Montrer que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2\psi'(x^2 + y^2) + 4x^2\psi''(x^2 + y^2).$$

(b) Donner la formule analogue pour $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

(c) En déduire que ψ vérifie l'équation différentielle

$$\psi' + t\psi'' = 0 \text{ sur }]1, 4[.$$

(d) Quelle est la dérivée de $t\psi'$?

(e) Prouver qu'il existe deux constantes C et A telles que

$$\psi(t) = C \ln(t) + A.$$

3. Que valent $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$?

4. Prouver $f'_x(z) = \frac{2C}{x+iy}$.

5. En utilisant la question précédente calculer

$$\int_{|z|=\frac{3}{2}} f'_x(z) dz$$

le cercle étant parcouru dans le sens direct.

6. Montrer que $C = 0$. En déduire que f est constante.

Exercice 8

Soit Γ un arc paramétré par un chemin γ de classe C^1 . On note $\bar{\Gamma}$ l'arc paramétré par $\bar{\gamma}$.

Soit également f une fonction continue sur l'image de Γ et soit f^* la fonction définie par $f^* = \overline{f(\bar{z})}$.

Montrer qu'on a

$$\overline{\int_{\Gamma} f(z) dz} = \int_{\bar{\Gamma}} f^*(z) dz$$

et si $\gamma = C(0, 1)^+$ alors

$$\overline{\int_{\Gamma} f(z) dz} = - \int_{\Gamma} \overline{f(z)} \frac{dz}{z^2}.$$

Exercice 9

1. Vérifier le théorème de Green-Riemann pour l'intégrale

$$\int_C (2xy - x^2) dx + (x + y^2) dy$$

où C est la frontière de la région K délimitée par les courbes d'équation $y = x^2$ et $y^2 = x$.

2. Même question pour l'intégrale

$$\int_C (x^2 - 2xy) dx + (y^2 - x^3y) dy$$

où C est la frontière du carré $[0, 2] \times [0, 2]$.

Exercice 10

A l'aide de la formule de Cauchy, calculer les intégrales suivantes

1. $\int_{C(i,1)^+} \frac{1}{(z^2 + 1)^2} dz$

2. $\int_{C(0,1)^+} \frac{\bar{z}}{z} dz$

3. $\int_{C(0,1)^+} \frac{\sin(z)}{z} dz$

4. $\int_{C(0,1)^+} \frac{\cos(z)}{z^2} dz$
5. $\int_{C(0,R)^+} \frac{e^{z^2}}{z^3 - a^3} dz$ pour $a \in \mathbb{C}_0$, $R > 0$ et $R \neq |a|$.

Exercice 11

Soit la fonction

$$f(z) = \frac{z^2}{z^2 + 1} e^{\frac{1}{z}}.$$

1. Quelles sont ses singularités isolées ? De quel type sont-elles ?
2. Pour tout $r > 0$, $r \neq 1$, calculer

$$\int_{(0,r)^+} f\left(\frac{1}{z}\right).$$

3. Déterminer les coefficients a_0 et a_1 du développement de Laurent de f en 0.

Exercice 12

Calculer les résidus associés aux singularités isolées de

1. $f_1(z) = \frac{\sin(z)}{z^2}$, $f_2(z) = \frac{e^z}{(z-1)^2}$, $f_3(z) = ze^{\frac{1}{z-1}}$
2. $f_4(z) = \frac{z^2}{1+z^4}$, $f_5(z) = \frac{1}{(1+z^2)(z-1)^2}$, $f_6(z) = \coth^2(\pi z)$
3. $f_7(z) = \frac{\sin(\pi z)}{(z-1)^3}$, $f_8(z) = \sin(z) \sin\left(\frac{1}{z}\right)$, $f_9(z) = \frac{\cos(z)}{(z^2+1)^2}$, $f_{10}(z) = \frac{1+z^{10}}{z^6(z^2+4)}$.

Exercice 13

Soit a un nombre réel strictement positif.

1. Soit ζ un nombre complexe tel que $\zeta^4 = -1$. Calculer $\text{Res}(f; \zeta a)$ et $\text{Res}(g; \zeta a)$, où $f(z) = \frac{1}{(z^4 + a^4)}$ et $g(z) = \frac{1}{(z^4 + a^4)^2}$.
2. Calculer les intégrales

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^4 + a^4)} \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^4 + a^4)^2}.$$

Exercice 14

Soit

$$f(z) = \frac{-1}{i} \times \frac{1}{z^2 - \frac{5}{2}z + 1}.$$

1. Déterminer les singularités et préciser leurs types.
2. En utilisant les résidus, calculer $\int_{|z|} = 1 f(z) dz$.
3. En déduire la valeur de l'intégrale trigonométrique suivante

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\frac{5}{2} - 2 \cos \theta}.$$

Indication : Poser $\cos(\theta) = \frac{z+z^{-1}}{2}$

Exercice 15

Montrer que :

1. $\int_0^{+\infty} \frac{x - \sin x}{x^3(x^2 + a^2)} dx = \frac{\pi}{2a^2} \left(1 - a + \frac{a^2}{2} - e^{-a}\right)$ où $a > 0$
2. $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x^2 + 1} dx = \pi \ln 2$
3. $\int_0^{+\infty} \cos x^2 dx = \int_0^{+\infty} \sin x^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ (Intégrales de Fresnel).
4. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^3} = \frac{3\pi}{16}$

5. $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{2a} e^{-a}$ où $a > 0$
6. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 16

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer

$$\int_{C(0,r)^+} \frac{(1+z)^{2n}}{z^{n+1}}$$

2. En déduire la valeur de

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{C_{2n}^m}{5^n}$$

Exercice 17

Vérifier le sens des séries/valeurs principales suivantes et calculer leur valeur en utilisant le théorème des résidus.

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{an^2 + b}$, $a, b > 0$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n^2 + a^2)^2}$, $a \in \mathbb{R}_0$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4 - a^4}$, $a \in \mathbb{R}_0$
2. $vp\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{c - n\pi}\right)$, $c \in \mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2k}}$, $a \in \mathbb{N}_0$.

Exercice 18

Soit un nombre réel $a > 0$. L'objectif est de calculer, au moyen de la méthode des résidus, les deux intégrales de Riemann généralisées :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 + a^2} \text{ et } \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2 + a^2}.$$

1. Commencer par justifier l'existence de I .
2. On introduit la fonction $f(z) = \frac{1}{z^2 + a^2}$. Calculer $\text{Res}_f(ia)$.
3. Avec $R > a$, dessiner le contour orienté fermé consistant en le segment $[-R, R]$ suivi du demi-cercle de rayon R au-dessus de l'axe réel.
4. Montrer que $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \frac{d(Re^{i\theta})}{(Re^{i\theta})^2 + a^2} = 0$.
5. Montrer que : $I = \frac{\pi}{2}$.
6. On choisit la détermination de la fonction logarithme complexe sur $\mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}_-$, définie, pour $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et avec $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$, par $z = \ln r + i\theta$. Sur cet ouvert $\mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}_-$, on considère la fonction holomorphe :

$$g(z) = \frac{\ln z}{z^2 + a^2}.$$

Avec $0 < \varepsilon < a$ et avec $R > a$, dessiner le contour orienté fermé consistant en le segment $[-R, -\varepsilon]$, suivi du demi-cercle de rayon R au-dessus de l'axe réel, suivi du segment $[\varepsilon, R]$, suivi du demi-cercle de rayon R au-dessus de l'axe réel.

7. Montrer que $J = \frac{\pi}{2} \ln a$.

Indication : Calculer d'abord $\text{Res}_g(ia)$ en utilisant la valeur de $\ln i$, que l'on déterminera auparavant.